第18卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 2
1998年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

# Cayley 图的同构分解及弱DCI-子集的充要条件*

黄 琼 湘

(新疆大学数学系, 乌鲁木齐 830046)

**摘　要**　本文得到了Cayley 图的同构分解定理及弱DCI-子集的充要条件. 证明了二面体群是弱 2-DCI-群, 同时确定了二面体群上 2 度Cayley 图的自同构群.

**关键词**　Cayley 图, 同构, DCI-子集

**分类号**　AMS(1991) 05C25/CCL O157.5

## 1　引　言

设$(G, 1)$是一个有限群, 称$G$的子集$S$是一个Cayley 子集如果$1\notin S$. 对每一个Cayley 子集定义Cayley 图如下:

$$C(G,S) = (V, E),$$

其中

$$V = G,\ E = \{(u, v) \mid u^{-1}v\in S, u, v\in G\}.$$

显然, $C(G,S)$是一个有向图, 如果$S = S^{-1}$, 则它可视为无向图, 当无需区分它们时统称其为Cayley 图.

设$\mathrm{Aut}G$为$G$的自同构群, $C(G,S)$和$C(G,T)$为Cayley 图. 如果存在$\tau\in\mathrm{Aut}G$使$\tau(S) = T$, 则显然有$C(G,S)\cong C(G,T)$. 反之, 如果对任何与$C(G,S)$同构的$C(G,T)$都存在$\tau\in\mathrm{Aut}G$使$\tau(S) = T$, 则称$S$为$G$的DCI-子集. 一个DCI-子集$S$被称作是弱DCI-子集, 如果$S$生成$G$. 显然, 当$S$是DCI-子集时$C(G,S)$的同构类被$\mathrm{Aut}G$完全确定了.

Cayley 图的同构问题是这方面研究的一个基本问题[1], DCI-子集的概念就是为此而引进的[2]. 如果$G$中基数不超过$m$的Cayley 子集都是DCI-子集, 则$G$被称作$m$-DCI群, 类似地有弱$m$-DCI群的概念. [3]证明了循环群是 2-DCI群及$m$-CI群($m = 4, 5$). [4], [5]证明了Abel 群是弱 2-DCI群, 还刻画了$m$-CI Abel 群($m = 4, 5$). 但是, 非可换的$m$-DCI群方面的结果还没有见到.

本文首先给出一个Cayley 图的同构分解定理及一个Cayley 子集是弱DCI-子集的充要条件. 作为应用证明了二面体群是弱 2-DCI群, 此外, 还举例说明二面体群不是 2-DCI群.

* 1995年1月8日收到 1997年10月23日收到修改稿

## 2　主要结果

设 $L(G)=\{\sigma_g: a\to ga(\forall a\in G)\mid g\in G\}$, 则 $L(G)$ 是 $C(G,S)$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}C(G,S)$ 的子群, 它作用到 $C(G,S)$ 上是点传递的. 设 $C(G,S)\cong C(G,T)$, 则显然存在从 $C(G,S)$ 到 $C(G,T)$ 的同构映射 $\tau$ 使 $\tau(1)=1$, 所有这样的 $\tau$ 构成集合 $\Omega(S\to T)$. 当 $T=S$ 时, $\Omega(S\to T)$ 记作 $\Omega(S)$, 此时有 $\Omega(S)\le \mathrm{Aut}C(G,S)$. 下面的定理称作 Cayley 图的同构分解定理, 它将同构的 Cayley 图分解为一些同构的子图.

**定理 1**　设 $C(G,S)\cong C(G,T)$, $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$ 是 $S$ 的一个子集分划, 且对任何 $\tau\in\Omega(S)$ 有 $\tau(S_i)=S_i(i=1,2,\cdots,k)$, 则 $T$ 也有子集分划 $T=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k$, 且对任何 $\tau\in\Omega(S\to T)$ 有 $\tau\in\Omega(S_i\to T_i)$, 从而 $C(G,S_i)\cong C(G,T_i)$, $i=1,2,\cdots,k$.

**证明**　取定 $\tau_0\in\Omega(S\to T)$. 显然, $\tau_0$ 导致一个从 $S$ 到 $T$ 的 1-1 映射. 令 $T_i=\tau_0(S_i)$, $i=1,2,\cdots,k$. 则 $T=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k$ 是 $T$ 的一个子集分划. 任取 $\tau\in\Omega(S\to T)$, 显然, $\pi=\tau_0^{-1}\tau\in\Omega(S)$. 于是依假设有 $\pi(S_i)=S_i$, $i=1,2,\cdots,k$. 从而

$$\tau(S_i)=T_i \tag{1}$$

设 $(u,v)$ 是 $C(G,S)$ 的任一条弧且满足 $u^{-1}v\in S_i(1\le i\le k)$, 则 $(u,v)$ 也可视为 $C(G,S_i)$ 的一条弧. 取 $g\in G$ 及 $\sigma_g\in L(G)$. 易见, $\sigma_{\tau(g)^{-1}}\tau\sigma_g\in\Omega(S\to T)$ (这里 $\tau(g)^{-1}$ 是 $\tau(g)$ 在 $G$ 中之逆元). 于是, 根据(1)式得到

$$\sigma_{\tau(g)^{-1}}\tau\sigma_g(u^{-1}v)\in T_i.$$

这样便存在 $t_i\in T_i$ 使 $\sigma_{\tau(g)^{-1}}\tau\sigma_g(u^{-1}v)=t_i$, 由此得到 $\tau(gu^{-1}v)=\tau(g)t_i$. 再取 $g=u$, 则有 $\tau(v)=\tau(u)t_i$. 这说明 $(\tau(u),\tau(v))$ 是 $C(G,T_i)$ 的一条弧.

反之, 设 $(\tau(u),\tau(v))$ 是 $C(G,T_i)$ 的一条弧, 则 $\tau(u)^{-1}\tau(v)\in T_i$. 由于 $\tau(u)^{-1}\tau(v)=\sigma_{\tau(u)^{-1}}\tau(v)=\sigma_{\tau(u)^{-1}}\tau\sigma_u(u^{-1}v)$, 又因为 $\sigma_{\tau(u)^{-1}}\tau\sigma_u\in\Omega(S\to T)$, 再根据(1)式有 $u^{-1}v\in S_i$.

综合以上讨论可知 $\tau\in\Omega(S_i\to T_i)$, 从而, $C(G,S_i)\cong C(G,T_i)$, $i=1,2,\cdots,k$.

$\mathrm{Aut}C(G,S)$ 的子群 $\Omega(S)$ 作用到 $S$ 上分为若干个轨道的并, 设 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是所有这样的轨道, 则

$$S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k \tag{2}$$

是 $S$ 的一个子集分划, 并且对任何 $\tau\in\Omega(S)$ 有 $\tau(S_i)=S_i$, $i=1,2,\cdots,k$. (2)被称作是 $C(G,S)$ 的 $\Omega(S)$ 的轨道分划. 假如 $C(G,S)\cong C(G,T)$, 则据定理 1 有 $C(G,T)$ 的一个 $\Omega(T)$ 轨道分划 $T=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k$ 使得对任何 $\tau\in\Omega(S\to T)$ 有 $\tau\in\Omega(S_i\to T_i)$ $(T_i=\tau(S_i))$, $i=1,2,\cdots,k$. 这样, $C(G,S)$ 和 $C(G,T)$ 的同构便分解为子图 $C(G,S_i)$ 和 $C(G,T_i)$ 的同构. 注意到 $C(G,S_i)$ 是弧传递的 Cayley 图, 这意味着在 Cayley 图的同构研究中 $C(G,S_i)$ 的同构将起重要的作用.

下面给出一个群的弱 DCI-子集的充要条件.

**定理 2**　设 $G=\langle S\rangle$, 则 $S$ 是 DCI-子集的充要条件是对任何与 $C(G,S)$ 同构的 $C(G,T)$, 存在一个 $\tau\in\Omega(S\to T)$ 使 $\tau\sigma_a\tau^{-1}\in L(G)$, 这里 $a\in S$ 及 $\sigma_a\in L(G)$.

**证明**　先证明充分性. 依假设存在 $g\in G$ 使 $\tau\sigma_a\tau^{-1}=\sigma_g$, 此即 $\tau\sigma_a=\sigma_g\tau$. 从而, 对任何 $u\in G$ 有

$$\tau\sigma_a(u)=\sigma_g\tau(u)\Rightarrow\tau(au)=g\tau(u).$$

取 $u=1$, 根据 $\tau$ 的假设得到 $g=\tau(a)$. 于是推出 $\tau(au)=\tau(a)\tau(u)$. 由于 $a$ 和 $u$ 都可以是 $S$ 中的任何元素, 再考虑到 $S$ 生成 $G$, 利用归纳法不难证明下面的

$$\tau(\prod_i s_i)=\prod_i \tau(s_i),\quad s_i\in S.$$

这说明 $\tau\in \mathrm{Aut}G$. 另外, 显然有 $\tau(S)=T$, 按定义知 $S$ 是 DCI-子集

反之, 假设 $S$ 是 DCI-子集, 则存在 $\tau\in\Omega(S\to T)$ 使 $\tau\in \mathrm{Aut}G$, 自然有 $\tau\sigma_a\tau^{-1}=\sigma_{\tau(a)}$, 所以 $\tau\sigma_a\tau^{-1}\in L(G)$.

[2] 曾得到一个 DCI-子集的充要条件, 由于弱 DCI-子集具有限制 $G=\langle S\rangle$, 故定理 2 与 Babai 的条件不同 下面利用定理 1 和定理 2 讨论二面体群上的 2 度 Cayley 图的同构问题

**定理 3** 二面体群 $D_n(n\geq 3)$ 的二元生成子集是弱 DCI-子集, 从而 $D_n$ 是弱 2-DCI 群

**证明** 设 $D_n=\{1,a,a^2,\cdots,a^{n-1},b,ba,\cdots,ba^{n-1}\}$, 这里 $a^n=1$, $ba=a^{-1}b$. 设 $S$ 是 $D_n$ 的二元生成子集, 则 $S$ 或者含有一个 2 阶元和一个 $n$ 阶元, 或者含有两个 2 阶元, 以下区别这两种情形

情形 1 不妨设 $S=\{a,b\}$, $o(a)=n$, $o(b)=2$

设 $C(D_n,S)\cong C(D_n,T)$, 这里 $T=\{t_1,t_2\}$. 不难看出对任何 $\tau\in\Omega(S\to T)$, $\tau(a)$ 和 $\tau(b)$ 总是不变的, 于是可设 $\tau(a)=t_1$ 和 $\tau(b)=t_2$. 根据定理 1 有

$$C(D_n,\{a\})\cong C(D_n,\{t_1\}) \text{ 和 } C(D_n,\{b\})\cong C(D_n,\{t_2\}).$$

这说明 $o(t_1)=n$ 而 $o(t_2)=2$ 于是 $D_n$ 又可表为

$$D_n=\{1,t_1,t_1^2,\cdots,t_1^{n-1},t_2,t_2t_1,\cdots,t_2t_1^{n-1}\}.$$

对任何 $u\in D_n$, 令

$$\alpha(u)=\begin{cases} t_1^i, & \text{如果 } u=a^i,\\ t_2t_1^i, & \text{如果 } u=ba^i\,(0\leq i\leq n-1).\end{cases}$$

显然 $\alpha\in \mathrm{Aut}D_n$ 且 $\alpha(S)=T$. 所以, $S$ 是 DCI-子集

情形 2 设 $S=\{c,d\}$, 这里 $o(c)=o(d)=2$;

设 $C(D_n,S)\cong C(D_n,T)$, 这里 $T=\{c',d'\}$. 此时, $C(D_n,S)$ 是 $2n$ 长的圈

$$(\cdots(dc)^2,(dc)d,dc,d,1,c,cd,(cd)c,(cd)^2,\cdots),$$

故 $C(D_n,T)$ 也是这样的圈

$$(\cdots(d'c')^2,(d'c')d',d'c',d',1,c',c'd',(c'd')c',(c'd')^2,\cdots).$$

取 $\tau\in\Omega(S\to T)$ 及 $\sigma\in L(D_n)$, 则 $\tau\sigma_c\tau^{-1}\in \mathrm{Aut}C(D_n,T)$, 有

$$\tau\sigma_c\tau^{-1}:\tau(x)\to\tau(cx),\quad \forall x\in D_n.$$

不难验证 $\tau\sigma_c\tau^{-1}\in L(G)$. 类似可验证 $\tau\sigma_d\tau^{-1}\in L(G)$. 故据定理 2, $S$ 是 DCI-子集

由于 $C(G,S)$ 是点传递图, 熟知[6] $\mathrm{Aut}C(G,S)=L(G)\Omega(S)$. 在定理 3 的证明中当把 $C(D_n,T)$ 视为 $C(D_n,S)$ 时, 便得到下面的结论

**定理 4** 设 $S$ 是 $D_n$ 的二元生成集, 则

$$\mathrm{Aut}C(D_n,S)\cong\begin{cases} L(D_n), & \text{如果 } S \text{ 只含一个 2 阶元},\\ L(D_n)\{I,\sigma\}, & \text{如果 } S \text{ 含两个 2 阶元}\end{cases}$$

这里 $\sigma$ 是正 $n$ 边形的一个对称变换

已知 Abel 群是弱 2-DCI 群, 但不是 2-DCI 群[4]. 最后举例说明二面体群也不是 2-DCI 群

**例 1** 设$D_8=\{1, a, a^2, \cdots, a^7, b, ba, \cdots, ba^7\}(a^8=1, b^2=1)$. 取$S=\{a, a^7\}$, $T=\{ba^2, b\}$. 不难看出$C(D_8, S)$和$C(D_8, T)$都是两个 8 长圈的并, 故$C(D_8, S)\cong C(D_8, T)$. 但是, $S$ 生成 8 阶循环群, 而 $T$ 生成二面体群$D_4$. 故不存在 $\tau\in \mathrm{Aut}D_8$ 使 $\tau(S)=T$. 这说明$D_8$不是 2-DCI 群.

## 参 考 文 献


[1] P. P. Pálfy, *Isomorphism problem for relational structures with cyclic automorphism*, Europ. J. Combinatorics, 8(1987), 35- 43.

[2] L. Babai, *Isomorphism problem for a class of point-symmetric structure*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 29(1977), 329- 333.

[3] 孙 良, 无向循环图的同构, 数学年刊, 9A: 5(1988), 567- 574.

[4] 方新贵, 有限交换 2-DCI 群的刻画, 数学杂志, 8(1988), 315—317.

[5] Fang Xingui and Xu Mingyao, *On the isomorphisms of cayley graphs of small valency*, Algebra Colloq., 1: 1(1994), 67- 76.

[6] N. L. Biggs, *Algebraic graph theory*, Combridge Press, 1974.


# Isomorphism Decomposition of Cayley Graph and Necessary and Sufficient Condition of Weak DCI-Subset


*Huang Qiongxiang*

(Dept. of Math., Xinjiang Univ., Urumqi)



**Abstract**

In this paper, we prove a theorem of isomorphism decomposition of cayley graph and give a necessary and sufficient condition of the weak DCI-subset. As an application, we prove that dihedral group is a weak 2-DCI group and determine the automorphism group of cayley graph of degree 2 on dihedral group.



**Keywords** Cayley graph, isomorphism, DCI-subset.