关于“切于已知球的单形宽度”一文的一点注记*

沈　文　选
(湖南师范大学数学系, 长沙 410081)

摘　要　设 E^n 中 n 维单形 Δ_n 的宽度以及内切球半径、n 维体积、侧面的 $n-1$ 维体积、棱长、中线长、外接球半径分别为 $\omega(\Delta_n)$, $r(\Delta_n)$, $V(\Delta_n)$, $V(F_k)$, ρ_{ij}, m_k, $R(\Delta_n)$, 本文证明了存在仅与维数 n 有关的绝对常数 $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, g_n$, 满足不等式链

$$\omega(\Delta_n) \le a_n r(\Delta_n) \le b_n V^{\frac{1}{n}}(\Delta_n) \le c_n\Big[\prod_{k=1}^{n+1} V(F_k)\Big]^{\frac{1}{n^2-1}} \le d_n \prod_{1\le i<j\le n+1} \rho_{ij}^{\frac{2}{n(n+1)}}$$
$$\le e_n\Big(\sum_{1\le i<j\le n+1} \rho_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}} = f_n\Big(\sum_{k=1}^{n+1} m_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le g_n R(\Delta_n),$$

其中所有等号当且仅当单形 Δ_n 正则时成立

关键词　单形, 宽度, 不等式
分类号　AMS(1991) 51K05/CCL O178

在 n 维欧氏空间 E^n 中, 一个有界凸体 K 的宽度这样定义的: 对于每个单位向量 u, 将 K 的一对与 u 垂直的支撑超平面之间的距离记作 $\tau(K, u)$, 令

$$\omega(K) = \min_u \tau(K, u), \tag{1}$$

将 $\omega(K)$ 叫做 K 的宽度

Sallee 在 1974 年提出猜测说[1],“内接于球的所有单形中, 正则单形具有最大宽度”, 随后, 这个猜测被 R. Alexander[2]所证实

文献[3]运用度量方程, 建立了不等式

$$\omega^2(\Delta_n) \ge \frac{\big[\frac{n+1}{2}\big]\big(n+1-\big[\frac{n+1}{2}\big]\big)}{n^3(n+1)} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} V^2(F_i)}{V^2(\Delta_n)}, \tag{2}$$

其中 $\omega(\Delta_n)$, $V(\Delta_n)$, $V(F_i)$ 分别表 n 维单形 Δ_n 的宽度, n 维体积, 侧面 F_i 的 $n-1$ 维体积, $\big[\frac{n+1}{2}\big]$表取其整数, 而且(2)中等号当且仅当 Δ_n 为正则单形时成立

运用(2), 文献[3]获得了

$$\omega(\Delta_n) \le b_n V^{\frac{1}{n}}(\Delta_n), \tag{3}$$

其中

$$b_n = \frac{n!^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{n-1}{2n}}}{\big[\frac{n+1}{2}\big]^{\frac{1}{2}}\big(n+1-\big[\frac{n+1}{2}\big]\big)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4}$$

* 1995 年 6 月 26 日收到

而且(3)中等号当且仅当 Δ_n 正则时取得

从而证明了比 Sallee-Alexander 定理更强的结果:"一切维数相同体积相等的单形中,正则单形具有最大宽度."

文献[4]也运用(2)式,证明了

$$\omega(\Delta_n) \leq a_n r(\Delta_n), \tag{5}$$

其中 $r(\Delta_n)$ 为 n 维单形 Δ_n 的内切球半径,

$$a_n = \frac{(n+1)n^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}, \tag{6}$$

而且(5)中的等号当 Δ_n 是正则单形时可以取到

由此便证明了如下结论:

定理 1　外切于一已知球的所有单形中,正则单形具有最大的宽度

本文将证明,运用(2)式,还可获得一系列不等式,且这些不等式与(3),(5)组成了一条不等式链 由此便知,定理 1 是一个最强的结论,而 Sallee-Alexander 定理是一个较弱的结论

为了讨论问题的方便,先介绍几条引理,然后运用(2)给出了几个不等式,最后给出一条定理

引理 1[5]　在 n 维单形 Δ_n 的 n 维体积 $V(\Delta_n)$ 与其侧面 F_k 的 $n-1$ 维体积 $V(F_i)$ 之间有不等式

$$V(\Delta_n) \leq (n+1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\left[\prod_{k=1}^{n+1}V(F_k)\right]^{\frac{n}{n^2-1}}, \tag{7}$$

且当该单形为正则时等号成立

引理 2[6]　设 $\sigma_N=\{P_1, P_2, \cdots, P_N\}$ 是 E^n 中$(N>n)$的一个有限点集,从 σ_N 中任取 $k+1$ 个点,以它们为顶点作一个 k 维单形,把所有这些单形的 k 维体积的乘积记为 M_k,则有

$$\left[\frac{k!}{\sqrt{k+1}}M_k^{\binom{N}{k+1}^{-1}}\right]^{\frac{1}{k}} \geq \left[\frac{l!}{\sqrt{l+1}}M_l^{\binom{N}{l+1}^{-1}}\right]^{\frac{1}{l}}, \tag{8}$$

$(1\leq k<l\leq n)$ 且等号当且仅当所有的 l 维单形 Δ_l 正则时成立

引理 3[3]　n 维单形 Δ_n 的 n 维体积 $V(\Delta_n)$ 和其侧面 F_k 的 $n-1$ 维体积 $V(F_k)$ 之间有不等式

$$\sum_{k=1}^{n+1}V^2(F_k) \geq n^3\left(\frac{n+1}{n!^2}\right)^{\frac{1}{n}}V^{2-\frac{2}{n}}(\Delta_n), \tag{9}$$

其中等号当且仅当 Δ_n 为正则单形时成立

引理 4[7]　n 维单形 Δ_n 的棱长 ρ_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n+1)$ 和外接球半径 $R(\Delta_n)$ 之间不等式

$$\sum_{1\leq i<j\leq n+1}\rho_{ij}^2 \leq (n+1)^2R^2(\Delta_n), \tag{10}$$

其中等号当且仅当单形 Δ_n 的重心与外接球球心重合时成立

引理 5[5]　n 维单形 Δ_n 的内切球半径 $r(\Delta_n)$ 和 n 维体积 $V(\Delta_n)$ 之间有不等式

$$r(\Delta_n) \leq \left[\frac{n!^2}{n^n(n+1)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{2n}}V^{\frac{1}{n}}(\Delta_n), \tag{11}$$

且当该单形正则时等号成立

引理 6[8]　n 维单形 Δ_n 的棱长 ρ_{ij} 与其高维中线 m_k $(k=1,\cdots,n+1$, 单形顶点 P_i 与所对侧面 F_i 的重心的连线称为高维中线) 之间有关系

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\rho_{ij}^2=\frac{n^2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}m_k^2. \tag{12}$$

下面, 运用(2), 给出一系列不等式:

将(9)式代入(2)式, 得

$$\bar{\omega}^2(\Delta_n)\ge\frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{(n+1)^{\frac{n-1}{n}}n!^{\frac{2}{n}}V^{\frac{2}{n}}(\Delta_n)}, \tag{13}$$

其中等号当且仅当 Δ_n 为正则单形时取到

由(8)式, 取 $N=n+1$, $l=n-1$, $k=1$, 整理得

$$\prod_{k=1}^{n+1}V(F_k)\le\frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n^2-1}{2}}(n-1)!^{n+1}}\prod_{1\le i<j\le n}\rho_{ij}^{\frac{2(n-1)}{n}}, \tag{14}$$

其中等号当且仅当所有的 $n-1$ 维侧面单形 F_k 正则时成立

将(14)式代入(7)式, 得

$$V(\Delta_n)\le\frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{1\le i<j\le n+1}\rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}, \tag{15}$$

其中等号当且仅当 Δ_n 正则时成立

对(15)中的 ρ_{ij}^2 运用算术-几何平均不等式, 得

$$V(\Delta_n)\le\frac{1}{n!(n+1)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{n}{2}}}\left(\sum_{1\le i<j\le n+1}\rho_{ij}^2\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{16}$$

其中等号当且仅当 Δ_n 正则时成立

将(12)式代入(16)式, 得

$$V(\Delta_n)\le\frac{n^{\frac{n}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}-n}}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n+1}m_k^2\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{17}$$

其中等号当且仅当 Δ_n 正则时成立

将(10)式代入(16)式, 得

$$V(\Delta_n)\le\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n!\,n^{\frac{n}{2}}}R^n(\Delta_n), \tag{18}$$

其中等号当 Δ_n 正则时可以取到

于是, 由(13)式, 以及分别将(7)、(15)、(16)、(17)、(18)代入(13)式, 便有不等式链:

$$\omega(\Delta_n)\le b_nV^{\frac{1}{n}}(\Delta_n)\le c_n\left[\prod_{k=1}^{n+1}V(F_k)\right]^{\frac{1}{n^2-1}}$$

$$\le d_n\prod_{1\le i<j\le n+1}\rho_{ij}^{\frac{2}{n(n+1)}}\le e_n\left(\sum_{1\le i<j\le n+1}\rho_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= f_n\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \le g_n R(\Delta_n), \tag{19}$$

其中

$$c_n = \frac{n!^{\frac{1}{n-1}}(n+1)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2(n-1)}}\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{20}$$

$$d_n = \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{21}$$

$$e_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{22}$$

$$f_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{23}$$

$$g_n = \frac{n+1}{n^{\frac{1}{2}}\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{24}$$

而且(19)中所有等号当 Δ_n 正则时可以取到

又将(11)式代入(5)式, 得

$$\omega(\Delta_n) \le a_n r(\Delta_n) \le b_n V^{\frac{1}{n}}(\Delta_n), \tag{25}$$

其中 a_n, b_n 均由(6), (4)式给出, 而且(25)式中等号当且仅当 Δ_n 正则时成立

如果注意到结论[9]:

$$n r(\Delta_n) \le R(\Delta_n), \tag{26}$$

等号当且仅当 Δ_n 的两球心重合时成立 这时有

$$\omega(\Delta_n) \le a_n r(\Delta_n) \le g_n R(\Delta_n), \tag{27}$$

其中 a_n, g_n 均由(6), (24)式给出, 而且(27)式等号当 Δ_n 正则时可以取到

于是, 由(19), (25), (27)有

定理 2 若 $\omega(\Delta_n)$, $r(\Delta_n)$, $V(\Delta_n)$, $V(F_k)$, ρ_{ij}, m_k, $R(\Delta_n)$ 分别表示 E^n 中 n 维单形 Δ_n 的宽度、内切球半径、n 维体积、侧面的 $n-1$ 维体积、棱长、中线长、外接球半径, 则存在仅与维数 n 有关的绝对常数 a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, 满足不等式链

$$\begin{aligned}\omega(\Delta_n) &\le a_n r(\Delta_n) \le b_n V^{\frac{1}{n}}(\Delta_n) \\ &\le c_n\left[\prod_{k=1}^{n+1} V(F_k)\right]^{\frac{1}{n^2-1}} \le d_n \prod_{1\le i<j\le n+1} \rho_{ij}^{\frac{2}{n(n+1)}} \\ &\le e_n\left(\sum_{1\le i<j\le n+1} \rho_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = f_n\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le g_n R(\Delta_n),\end{aligned} \tag{28}$$

其中 a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n 均由(6), (4), (20), (21), (22), (23), (24)式给出, 而且(28)式中所

有等号当单形 Δ_n 正则时可以取到

由此, 便完成了"切于已知球的单形宽度"的一点注记

参 考 文 献

[1] R. K. Guy, *Problems Lecture notes in Math.*, 490, *The geometry of metric and linear spaces*, Springer-Verlag, 1975, 233-244.

[2] R. Alexander, *The width and diameter of a simplex*, Geometriae Dedicata, 6: 1(1977), 87-94.

[3] 杨路、张景中, 度量方程应用于 Sallee 猜想, 数学学报, 26: 4(1983), 488-493.

[4] 毛其吉、左铨如, 切于已知球的单形宽度, 数学研究与评论, 9: 1(1989), 14—15.

[5] 张景中、杨路, 关于质点组的一类几何不等式, 中国科学技术大学学报, 2(1981), 1-8.

[6] 苏化明, 关于切点单形的两个不等式, 数学研究与评论, 10: 2(1990), 243-247.

[7] R. Alexander and K. B. Stolarsky, *Extremal problems of distance geometry related to energy integrils*, Tran. Amer. Math. Soc., 193(1974), 1-31.

[8] 苏化明, 与单形重心有关的几个几何不等式, 数学季刊, 1(1989), 32-37.

[9] M. S. Klamkin, Math. Magazine, 52(1979), 20-22.

Note on Paper "The Width of Simplex with Its Faces Contacted with the Given Sphere"

Shen Wenxuan

(Dept. of Math., Hunan Normal University, Changsha, 410081)

Abstract

Let $\omega(\Delta_n)$ denote the width of non-degenerate Δ_n in E^n and $r(\Delta_n), V(\Delta_n), V(F_k), \rho_{ij}, m_k, R(\Delta_n)$ denote the inradius, n-volume, $(n-1)$-volume, edge-length, mid-line-length, circumradius of the simplex, respectively. We prove the following:

$$\omega(\Delta_n) \geq a_n r(\Delta_n) \leq b_n V^{\frac{1}{n}}(\Delta_n) \leq c_n \Big[\prod_{k=1}^{n+1} V(F_k)\Big]^{\frac{1}{n^2-1}} \leq d_n \prod_{1\leq i<j\leq n+1} \rho_{ij}^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

$$\leq e_n \Big(\sum_{1\leq i<j\leq n+1} \rho_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}} = f_n \Big(\sum_{k=1}^{n+1} m_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq g_n R(\Delta_n),$$

where equalities holds if and only if the simplex is regular.

Keywords simplex, width, inequality.