第 18 卷第 2 期　数 学 研 究 与 评 论　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　May 1998

"向量极值问题的最优性条件"一文的注记*

陈 修 素
(重庆商学院数学教研室, 重庆 400067)

摘　要　本文给出了文[1]中的几个主要结果(即[1]中的推论 2, 定理 4, 定理 6 及定理 7)的反例, 进而更正了有关结果.

关键词　向量极值, 广义凸性, (弱)有效解, 最优性条件

分类号　AMS(1991) 90C29/CCL O221.2

设 Y, Z 是实线性拓扑空间, Y 中含原点 O 的凸锥称为 Y 的正锥, 记为 Y_+, 具有正锥的线性空间称为序线性空间, Y^* 表 Y 的拓扑对偶, 称集合 $Y_+^* = \{y^* \in Y^*: y^*(y) \geq 0, \forall y \in Y_+\}$ 为 Y_+ 的对偶锥, 其中 $y^*(y)$ 表 y^* 在点 y 的取值. Y_+, Z_+ 分别是 Y, Z 中的内部非空的正锥, D 是实线性空间 X 的任一非空集合, $f: D \to Z$, $g: D \to Y$, 考虑如下向量极值问题:

$$\text{(P)}\quad \min\ f(x),\qquad \text{s.t.}\quad x \in K,$$

其中 $K = \{x \in D: -g(x) \in Y_+\}$, 称为(P)的可行集.

$\bar{x} \in K$ 称为(P)的有效解(弱有效解): 指无 $x \in K$, 使 $f(\bar{x}) - f(x) \in Z_+ \backslash \{0\}$ ($\mathrm{int} Z_+$).

定义 1[1]　设 $F: D \to Y$, $\mathrm{int} Y_+ \neq \varnothing$.

(1)　F 称为在 D 上关于 Y_+ 广义次似凸的, 如果存在 $u \in \mathrm{int} Y_+$, $\forall x, y \in D$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists z \in D$, $\exists \rho > 0$, 使 $\epsilon u + \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) - \rho F(z) \in Y_+$;

(2)　F 称为在 D 上关于 Y_+ 次似凸的, 如果上述(1)中 $\rho = 1$;

(3)　F 称为在 D 上关于 Y_+ 广义严格似凸的, 如果 $\forall x, y \in D$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, $\exists z \in D$, $\exists \rho > 0$, 使 $\lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) - \rho F(z) \in \mathrm{int} Y_+$.

在[1]中得到如下结论(定理 1—3, 即[1]中的推论 2, 定理 4 和定理 6):

定理 1　设 f 是 K 上广义次似凸映射, $\bar{x}$ 是(P)的有效解, 则存在 $z^* \in Z_+^*$, $z^* \neq 0$, 使 $\bar{x}$ 是 $\min\limits_{x \in K} z^*(f(x))$ 的最优解.

定理 2　设 f 是 K 上广义严格似凸映射, 则 $\bar{x}$ 是(P)的有效解的充要条件是存在 $z^* \in Z_+^*$, $z^* \neq 0$, 使 $\bar{x}$ 是 $\min\limits_{x \in K} z^*(f(x))$ 的唯一最优解.

定理 3　设 $\bar{x}$ 是(P)的弱有效解, (f, g) 是关于 $Z_+ \times Y_+$ 广义次似凸的, 则存在 $z^* \in Z_+^* \in Z_+^*$, $y_0^* \in Y_+^*$, $(z_0^*, y_0^*) \neq (0, 0)$, 使得 $\min\limits_{x \in D}\{z_0^*(f(x)) + y_0^*(g(x))\} = z_0^*(f(x))$, 且 $y_0^*(g(\bar{x})) =$

* 1995 年 4 月 8 日收到 1997 年 9 月 25 日收到修改稿

0.

下述的例 1 说明了上述定理 1 及定理 2 的必要条件部分不正确

例 1　设 $K=\{(x_1,x_2)\in R^2: x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1^2+x_2^2\geq 1\}$, $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$, $\forall (x_1,x_2)\in K$. 易证 $f(x)$ 在 K 上关于 $Z_+=R_+^2$ 是广义严格似凸的, 从而也是广义次似凸的, 且 $\bar{x}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\in K$ 是(P)的弱有效解(也为有效解), 但不存在 $z^*\in R_+^2\setminus\{0\}$, 使 $\bar{x}$ 是 $\min_{x\in K} z^*(f(x))$ 的最优解

事实上如有 $z^*=(z_1^*,z_2^*)\in R_+^2\setminus\{0\}$, 使

$$\bar{x}\text{是}\min_{x\in K} z^*(f(x))\text{ 的最优解} \tag{1}$$

则 $z^*(f(\bar{x}))\leq z^*(f(x))$, $\forall x\in K$, 当取 x 为 K 中的点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 则有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1^*+z_2^*)\leq z_1^*, \tag{2}$$

及

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1^*+z_2^*)\leq z_2^*. \tag{3}$$

由 (2)+(3) 得 $\sqrt{2}(z_1^*+z_2^*)\leq z_1^*+z_2^*\Rightarrow(\sqrt{2}-1)(z_1^*+z_2^*)\leq 0\Rightarrow z_1^*=z_2^*=0$ 与假设 $z^*\neq 0$ 矛盾, 故(1)不真

下面的例 2 说明上述定理 3 不正确

例 2　设 D 为上例中的 K, $f(x)$ 与上例相同, $g(x)=(-x_1,-x_2)$ 是 $D\to Y=R^2$ 的映射, $Y_+=R_+^2$, 显然此时 $K=D$, $\bar{x}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 是问题(P)的弱有效解(也为有效解), 且 (f,g) 在 D 上关于 $R_+^2\times R_+^2$ (即 $Z_+\times Y_+$) 广义次似凸的, 即此时对(P)来说定理 3 的条件满足, 但其结论不真 如不然有 $(z_0^*,y_0^*)\in(R_+^2\times R_+^2)\setminus\{0\}$, 使

$$\min_{x\in D}\{z_0^*(f(x))+y_0^*(g(x))\}=z_0^*(f\bar{x}), \tag{4}$$

$$y_0^*(g(\bar{x}))=0.$$

取 D 中的两点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 由(4)得

$$z_1^*-y_1^*\geq(z_1^*+z_2^*)\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{5}$$

$$z_2^*-y_2^*\geq(z_1^*+z_2^*)\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{6}$$

其中 $(z_1^*,z_2^*)=z_0^*$, $(y_1^*,y_2^*)=y_0^*$. 由 (5)+(6) 得

$$z_1^*+z_2^*-y_1^*-y_2^*\geq\sqrt{2}(z_1^*+z_2^*), \tag{7}$$

从而 $(\sqrt{2}-1)(z_1^*+z_2^*)+(y_1^*+y_2^*)\leq 0\Rightarrow(z_0^*,y_0^*)=(z_1^*,z_2^*,y_1^*,y_2^*)=0$, 与假设相违

下面来证 $G=(f,g)$ 在 D 上关于 R_+^4 (即 $Z_+\times Y_+$) 广义次似凸的, 取 $u=(1,1,1,1)\in\text{int}R_+^4$, $\forall x,y\in D$, $\forall\epsilon>0$ 和 $\lambda\in(0,1)$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ 取

$$\rho=\sqrt{[\lambda x_1+(1-\lambda)y_1]^2+[\lambda x_2+(1-\lambda)y_2]^2}, \text{可知 } \rho>0.$$

再取 $z=(z_1,z_2)=\frac{1}{\rho}(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)\in D$，易验证 $\lambda G(x)+(1-\lambda)G(y)-\rho G(z)=0$，从而 $\epsilon u+\lambda G(x)+(1-\lambda)G(y)-\rho G(z)\in R_+^4$；由定义知，$G$ 是广义次似凸的

上面例 2 说明了上述定理 3 不正确，即[1]中的定理 6 不正确，进而可说明[1]中的定理 7 的第二个不等式不真

以上两例说明了如上定理 1—3 不正确，导致这些结论不真实的原因是：定理 1 中的条件 f 是广义次似凸映射不能导出 $f(x)-f(\bar{x})$ 的广义次似凸性，从而导致结论不一定成立 若将其条件中的 f 改为 $f(x)-f(\bar{x})$，由[1]中的定理 3 易知此时的结论真实 定理 2(3) 中的条件不能确保 $f(x)-f(\bar{x})[(f(x)-f(\bar{x}),g(x))]$ 的广义次似凸性，这也导致结论不一定成立 于是上述定理 2 和 3 可分别改为如下定理 1′、2.′

定理 1′ 设 $f(x)-f(\bar{x})$ 是 K 上广义严格似凸映射，则 $\bar{x}$ 是(P)的有效解的充要条件是存在 $z^*\in Z_+^*\setminus\{0\}$，使 $\bar{x}$ 是 $\min_{x\in K} z^*(f(x))$ 的唯一最优解

定理 2′ 设 $\bar{x}$ 是 (P) 的弱有效解，$(f(x)-f(\bar{x}),g(x))$ 是关于 $Z_+\times Y_+$ 广义次似凸的，则 $\exists\, z_0^*\in Z_+^*, y_0^*\in Y_+^*, (z_0^*,y_0^*)\neq 0$，使得：

$$\min_{x\in D}\{z_0^*(f(x))+y_0^*(g(x))\}=z_0^*(f(\bar{x}))$$

$$y_0^*(g(\bar{x}))=0$$

定理 1 的证明可由[1]中定理 4 的类似证法完成

定理 2 的证明 设 $G(x)=(f(x)-f(\bar{x}),g(x)),x\in D$，由 $\bar{x}$ 是(P) 的弱有效解，则不存在 $x\in K$ 使 $f(\bar{x})-f(x)\in \mathrm{int}Z_+$，从而易知不存在 $x\in D$，使 $-G(x)\in\mathrm{int}(Z_+\times Y_+)$，又由已知 $G(x)$ 是关于 $Z_+\times Y_+$ 广义次似凸的，由[1]中的定理 1 知存在 $(z_0^*,y_0^*)\in(Z_+\times Y_+)^*=Z_+^*\times Y_+^*$，且 $(z_0^*,y_0^*)\neq(0,0)$，使 $z_0^*(f(x)-f(\bar{x}))+y_0^*(g(x))\geq 0,\ \forall x\in D$，即

$$z_0^*(f(x))+y_0^*(g(x))\geq z_0^*(f(\bar{x})),\ \forall x\in D, \tag{8}$$

上式中令 $x=\bar{x}$ 得 $y_0^*(g(\bar{x}))\geq 0$，又 $\bar{x}\in K, y_0^*\in Y_+^*$ 得 $y_0^*(g(\bar{x}))\leq 0$，从而

$$y_0^*(g(\bar{x}))=0 \tag{9}$$

由(8)，(9)知定理 2 的结论真实

同理可看出[1]中定理 5 在 $(f'_{\bar{x}}(x),g'_{\bar{x}}(x)+g(\bar{x}))$ 为广义次似凸条件下结论一定真实，否则不一定成立；[1]中定理 7 的广义凸性条件改为 $(f(x)-f(\bar{x}),g(x))$ 是广义次似凸的，此时结论真实 于是[1]中的定理 5 和 7 可分为改为如下结果

定理 3′ 设 $\bar{x}\in D$ 是(P)的弱有效解，f 和 g 在 $\bar{x}$ 点是 Gateax 可微，映射 $(f'_{\bar{x}}(x),g'_{\bar{x}}(x)+g(\bar{x}))$ 在 D 上关于 $Z_+\times Y_+$ 是广义次似凸的，$0\in D$，则存在 $z_0^*\in Z_+^*, y_0^*\in Y_+^*$，使 $(z_0^*,y_0^*)\neq 0$，且 $z_0^*f'_{\bar{x}}+y_0^*g'_{\bar{x}}=0, y_0^*(g(\bar{x}))=0$

定理 4′ 设 $\bar{x}$ 是(P)的弱有效解，$(f(x)-f(\bar{x}),g(x))$ 是关于 $Z_+\times Y_+$ 广义次似凸的，且存在 $x_0\in D$，$-g(x_0)\in\mathrm{int}Y_+$，则 $\exists\, z_0^*\in Z_+^*, y_0^*\in Y_+^*, z_0^*\neq 0$，使

$$L(\bar{x},z_0^*,y^*)\leq L(\bar{x},z_0^*,y_0^*)\leq L(x,z_0^*,y_0^*),\ \forall x\in D, y^*\in Y_+^*,$$

其中 $L(x,z^*,y^*)=z^*(f(x))+y^*(g(x))$.

定理 3 的证明 令 $G(x)=(f'_{\bar{x}}(x),g'_{\bar{x}}(x)+g(\bar{x})),x\in D$. 因 $\bar{x}$ 是(P) 的弱有效解，则无 $x_0\in D$，使 $-G(x_0)\in\mathrm{int}(Z_+\times Y_+)$. 否则如 $\exists\, x_0\in D$，使 $-G(x_0)\in\mathrm{int}(Z_+\times Y_+)$，则有

$f'_{\bar{x}}(x_0) \in -\operatorname{int}Z_+$ 及 $g'_{\bar{x}}(x_0) + g(\bar{x}) \in -\operatorname{int}Y_+$, 于是知 $-g(\bar{x}) - \operatorname{int}Y_+$ 为 $g'_{\bar{x}}(x_0)$ 的一邻域, 又 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{g(\bar{x}+\lambda x_0) - g(\bar{x})}{\lambda} = g'_{\bar{x}}(x_0)$, 则存在 $\lambda_0 > 0$ (不妨要求 $\lambda_0 < 1$), 使得当 $0 < \lambda \leq \lambda_0 < 1$ 时, 有

$$\frac{g(\bar{x}+\lambda x_0) - g(\bar{x})}{\lambda} \in -g(\bar{x}) - \operatorname{int}Y_+,$$

从而有 $(1-\lambda)g(\bar{x}) - g(\bar{x}+\lambda x_0) \in \operatorname{int}Y_+$, $-g(\bar{x}+\lambda x_0) \in -(1-\lambda)g(\bar{x}) + \operatorname{int}Y_+ \subset Y_+ + \operatorname{int}Y_+ \subset \operatorname{int}Y_+$, 即

$$\bar{x} + \lambda x_0 \in K, \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_0), \tag{10}$$

又 $f'_{\bar{x}}(x_0) \in -\operatorname{int}Z_+$ 可知, 存在 $\lambda_0' > 0$, 使当 $0 < \lambda \leq \lambda_0'$ 时有

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}+\lambda x_0) \in \operatorname{int}Z_+, \tag{11}$$

显然(10)及(11)与 $\bar{x}$ 是(P)的弱有效解相违, 故不存在 $x_0 \in D$, 使 $-G(x_0) \in \operatorname{int}(Z_+ \times Y_+)$.

又已知 $G(x)$ 是广义次似凸的, 则由[1]中的定理1知, 存在 $(z_0^*, y_0^*) \in Z_+^* \times Y_+^* \setminus \{0\}$, 使

$$z_0^*(f'_{\bar{x}}(x)) + y_0^*(g'_{\bar{x}}(x)) \geq -y_0^*(g(\bar{x})), \quad \forall x \in D. \tag{12}$$

(12)式中取 $x = 0$ 得 $y_0^*(g(\bar{x})) \geq 0$, 又 $-g(\bar{x}) \in Y_+$ 得 $y_0^*(g(\bar{x})) \leq 0$, 从而 $y_0^*(g(\bar{x})) = 0$, 则(12)式变为 $z_0^* f'_{\bar{x}} + y_0^* g'_{\bar{x}} = 0$. 知定理3的结论成立.

定理4的证明　由定理2知存在 $(z_0^*, y_0^*) \in Z_+^* \times Y_+^*$ 且 $(z_0^*, y_0^*) \neq 0$, 使定理4的第二个不等式成立.

又 $\forall y^* \in Y_+^*$, 有 $L(\bar{x}, z_0^*, y^*) = z_0^*(f(\bar{x})) + y^*(g(\bar{x})) \leq z_0^*(f(\bar{x})) = L(\bar{x}, z_0^*, y_0^*)$, 即定理4中的第一不等式成立.

现证 $z_0^* \neq 0$, 否则由第二不等式知 $y_0^*(g(x)) \geq 0$, $\forall x \in D$, 取 $x = x_0$ 得 $y_0^*(g(x_0)) \geq 0$, 又 $g(x_0) \in -\operatorname{int}Y_+$ 得 $y_0^* = 0$, 从而 $(z_0^*, y_0^*) = 0$ 导致矛盾. 故定理4的结论真实.

参 考 文 献

[1] 杨新明, 向量极值问题的最优性条件, 高校应用数学学报, A 辑, 9(1994) (增刊), 73—81.

Notes on the Paper "Optimality Conditions in Vector Extreme Problem"

Chen Xiusu

(Chongqing Institute of Commerce, Chongqing 400067)

Abstract

Counterexamples for several main results of [1] are given, all the mistakes in [1] are corrected, and the corresponding new results are proved.

Keywords　vector extremum, generalized convexity, (weakly) efficient solution, optimality conditions