第 18 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

矩阵方程 AX = B 的实部正定解*

王　宜　举
(曲阜师范大学运筹所, 山东曲阜 273165)

摘　要　本文主要讨论了矩阵方程 $AX=B$ (其中 $A, B\in C^{m\times n}$) 的实部正定解的存在性, 并在矩阵方程 $AX=B$ 有实部正定解时, 给出了通解的表达式

关键词　实部正定矩阵, 广义逆, 通解
分类号　AMS(1991) 15A09, 15A21, 15A57/CCL O151.21

定义 1　设 $A\in C^{n\times n}$. 称 A 为实部正定矩阵, 若满足 $\forall x\in C^n, x\neq 0$, 有 $\mathrm{Re}(x^*Ax)>0$. 对 $A\in C^{n\times n}$, 有 $A=H(A)+iD(A)$, 其中 $H(A)=\frac{1}{2}(A+A^*)$, $D(A)=\frac{1}{2i}(A-A^*)$.

性质　$A\in C^{n\times n}$ 为实部正定矩阵当且仅当 $H(A)$ 为厄米特正定矩阵.

引理 1　设 $A\in C^{n\times n}$ 且有分块: $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, 其中 A_{11} 和 A_{22} 均为方阵. A 为实部正定矩阵当且仅当 A_{22} 和 $A_{11}-\frac{1}{2}(A_{12}+A_{21}^*)(A_{22}+A_{22}^*)^{-1}(A_{21}+A_{12}^*)$ 均为实部正定矩阵.

引理 2　设 $A, B\in C^{m\times n}$, 则矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件为 $AA^+B=B$, 且此时通解为 $X=A^+B+(I-A^+A)Y$, 其中 $Y\in C^{n\times n}$ 为自由变量.

对 $A, B\in C^{m\times n}$, 记 $\Omega=\{X: AX=B, X$ 为实部正定矩阵$\}$. 则有:

引理 3　设 $A, B\in C^{m\times n}$, $P\in C_m^{m\times m}$, $Q\in C_n^{n\times n}$, 记 $\overline{A}=PAQ$, $\overline{B}=PBQ^{-1^*}$, $\overline{X}=Q^{-1}XQ^{-1^*}$, $\overline{\Omega}=\{\overline{X}: \overline{A}\,\overline{X}=\overline{B}, \overline{X}$ 为实部正定矩阵$\}$. 则 $\Omega\neq\varnothing$ 的充分必要条件为 $\overline{\Omega}\neq\varnothing$, 且此时 $\Omega=Q\overline{\Omega}Q^*=\{Q\overline{X}Q^*: \overline{A}\,\overline{X}=\overline{B}, \overline{X}$ 为实部正定矩阵$\}$.

设 $A\in C_r^{m\times n}$, 其中 $r\leq\min\{m, n\}$, 由引理 3, 矩阵方程 $AX=B$ 可简化为:

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix},$$

其中 $X_1\in C^{r\times n}$, $X_2\in C^{(n-r)\times n}$, $B_1\in C^{r\times n}$, $B_2\in C^{(m-r)\times n}$. 记 $\Omega_1=\left\{\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}: \begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}\right.$ 为实部正定矩阵, $X_1\in C^{r\times n}, X_2\in C^{(n-r)\times n}, B_1\in C^{r\times n}, B_2\in C^{(m-r)\times n}\}$.

定理 1　$\Omega_1\neq\varnothing$ 的充分必要条件为 $B_2=0$ 且 B_{11} 为实部正定矩阵, 且此时有:

$$\Omega_1=\left\{\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ Y_{21} & D+\frac{1}{2}(Y_{21}+B_{12}^*)(B_{11}+B_{11}^*)^{-1}(Y_{21}^*+B_{12})\end{pmatrix}: D\in C^{(n-r)\times(n-r)}\text{ 为实部正定矩阵},\right.$$

* 1995 年 3 月 31 日收到 1997 年 9 月 4 日收到修改稿 山东省自然科学基金资助课题

$Y_{21} \in C^{(n-r)\times r}\}$, 这里 $B_1 = (B_{11} \quad B_{12}) \in C^{r\times n}$, $B_{11} \in C^{r\times r}$, $B_{12} \in C^{r\times(n-r)}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{pmatrix} \in C^{(n-r)\times n}$, $Y_{21} \in C^{(n-r)\times r}$, $Y_{22} \in C^{(n-r)\times(n-r)}$.

则由引理 3 和定理 1 得到:

定理 2 设 $A \in C_r^{m\times n}$, $B \in C^{m\times n}$ 且有相同的分块:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 为 r 阶方阵, 且 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{11}) = r$. 则 $\Omega \neq \varnothing$ 的充要条件为

(1) $B_{21}A_{11}^{*} - A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{*} + B_{22}A_{12}^{*} - A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}A_{12}^{*} = 0$;

(2) $B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}B_{12} = 0$;

(3) $U = B_{11}A_{11}^{*} + B_{12}A_{12}^{*}$ 为实部正定矩阵

且此时有:

$$\Omega = \left\{Q \begin{pmatrix} B_{11}A_{11}^{*} + B_{12}A_{12}^{*} & B_{12} \\ Y_{21} & D + \frac{1}{2}(Y_{21} + B_{12}^{*})(U + U^{*})^{-1}(Y_{21}^{*} + B_{12}) \end{pmatrix} Q^{*} : D \in C^{(n-r)\times(n-r)} \text{ 为实部正定矩阵}: Y_{21} \in C^{(n-r)\times r}\right\},$$

这里 $Q = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$.

参 考 文 献

[1] Lei Wu, *The Re-positive difinite solutions to the matrix inverse problem AX = B*, Linear Algebra and Its Applications, 174(1992), 145-151.

[2] 何旭初, 孙文瑜, 广义逆矩阵引论, 江苏科技出版社, 1991.

[3] Wang Yiju, *On the block independence in reflexive inner inverse and M-P inverse of block matrix*, SIAM Matrix Analysis and Its Applications, 19: 2(1998).

The Re-Positive Definite Solutions to the Matrix Equation AX = B

Wang Yiju

(O. R, Qufu Normal University, Shangdong 273165)

Abstract

The existence of Re-positive definite solution to the matrix equation $AX = B$ was discussed in this paper, and the formula of the general Re-positive definite solution to $AX = B$ is given when it exists

Keywords Re-positive definite matrix, generalized inverse, general solution.