

格上点式仿紧性*

刘 晓 石

(四川联合大学(西区)应用数学系, 成都 610065)

摘 要 本文在拓扑分子格(TML)上提出一种仿紧性,它以格上点式紧性^[3]为特款,讨论了它在 TML 上的几种不同的表现形式以及它与正规性的关系.

关键词 点式仿紧, σ 局部有限, 逆元.

分类号 AMS(1991) 54A10, 06F30/ CCL O159

前 言

在有关拓扑分子格(TML)上各种性质的研究中,有关覆盖性质,如紧性、仿紧性等的讨论较少,这也许与 TML 上无层次结构有关. 但覆盖性质毕竟是拓扑学中最重要性质之一,自有其讨论的意义. 笔者曾在 TML 上定义过一种点式紧性^[3],它在一定意义下是 Fuzzy 良紧性的推广. 本文在此基础上引入点式仿紧的概念,初步讨论了它的一些性质.

0 预备

本文以 L 表示完全分配格,以 $(L(M), \eta)$ 表示非零并既约元集为 M ,余拓扑为 η 的拓扑分子格^[1],简称为 TML. 其最小,最大元分别记为 $0, 1$. 文中,常以小写字母表 M 的成员,即分子式点,以大写字母表 L 的一般成员. 设 $D \subset L$, 记 $D = \{D \mid D \leq d, d \in D\}$, 其余类似. $\forall a \in M$, 以 $\beta^*(a)$ 表示 a 的标准极小族^[1], 以 ω 表示第一个无穷基数.

定义 0.1 在 $(L(M), \eta)$ 中, $\forall a \in M$, 记 $\eta(a) = \{P \in \eta \mid a \not\leq P\}$, $\eta(a)$ 叫 a 的远域系.

定义 0.2 设 $A \subset L$, 记 $M(A) = \{a \in M \mid a \leq A\}$, 记 $M^*(A) = \{a \in M(A) \mid a \text{ 是 } L \text{ 的极大点}\}$. 显然 $M(A) = A$, $M^*(A) \leq A$, $M^*(1)$ 表示 L 中全体极大点之集, $M^*(1) = 1$.

定义 0.3 设 $A \subset L$, 若 A 中不含极大点,则简记为 $A < 1$. $\forall \varphi \subset L$, 若 $\varphi < 1$, 则称 φ 是 L 的点式余覆盖,若这时还有 $\varphi \subset \eta$, 则称 φ 是 L 的点式闭余覆盖,或点式远域族,简记为 PRF.

定义 0.4^[3] $(L(M), \eta)$ 称为点式紧的,或称为 P 紧的,如果它的每个 PRF 有有限子 PRF.

定义 0.5^[4] 在 $(L(M), \eta)$ 上, $\forall a \in L, a \in M$ 称为是 A 的内点,如果存在 $P \in \eta(a)$,

* 1995 年 7 月 11 日收到. 1998 年 1 月 7 日收到修改稿.

使 $P \cap A = 1$. 记 $A^\circ = \{a \in M \mid a \text{ 是 } A \text{ 的内点}\}$, 它叫 A 的内部.

定义 0.6 $(L(M), \eta)$ 称为是上全序的, 如果 $\forall a \in L$, 集合 $\uparrow a = \{b \in M \mid a \leq b\}$ 是全序集.

由[4]知, 上全序性等价于 L 的不同极大点彼此不交.

有关“内部”的性质见[4], 其余未提及的记号、概念见[1].

1 逆元及局部有限性

引理 1.1 在 $(L(M), \eta)$ 上, 设 $P \in \eta, A \in L$, 若 $P \cap A = 1$, 则 $P \cap A^\circ = 1$, 且 $(M^*(P)) \cap A^\circ = 1$.

证明 否则, 存在 $a \in M$, 使 $a \not\leq A^\circ \cap P$, 故 a 不是 A 的内点, 对 $P \in \eta(a)$ 应有 $P \cap A \neq 1$, 矛盾. 并且, $\forall b \in M^*(1)$, 若 $b \not\leq M^*(P)$, 则 b 不是 P 中极大点, 应有 $b \not\leq P$, 故 $b \leq A^\circ$.

定义 1.2 设 $A \in L$, 定义 $A^c = \{a \in M \mid a \not\leq A\}$, 它叫 A 的逆元. 显然 $A \cap A^c = 0$ 且当 $B \leq A$ 时, $A^c \leq B^c$. 一般地, A 与 A^c 可以相交, 甚至有 $A \leq A^c$.

有以下命题:

命题 1.3 设 $(L(M), \eta)$ 是上全序的, 则 $A \cap A^c < 1$.

证明 否则, 存在 $a \in M^*(1)$, 使 $a \leq A \cap A^c$. 由 $a \leq A^c$, 取 $b \in \beta^*(a)$, 则存在 e 是含 b 的极大点, 使 $e \not\leq A$. 显然 $e \neq a$, 且 $b \leq a \leq e$, 这矛盾于 a 与 e 的不交性.

注 $(A^c)^c \leq \{a \in M \mid a \not\leq A^c\} \leq A$, 但等号不必成立.

命题 1.4 在上全序条件下, 若 $A \in L$ 且 $M^*(A) \neq \emptyset$, 则 $(M^*(A)) \cap A^c = 0$, 从而 $\forall a \in M^*(A), a \not\leq A^c$.

证明 否则, 存在 $b \in M, b \leq (M^*(A)) \cap A^c$, 取 $a \in \beta^*(b)$, 由标准极小族的性质^[1]知, 存在 $e_1 \in M^*(A)$, 使 $a \leq e_1$; 同理, 存在 $e_2 \in M^*(1), e_2 \not\leq A$ 使 $a \leq e_2$, 于是 $e_1 \cap e_2 \neq 0$, 显然 $e_1 \neq e_2$, 矛盾.

定理 1.5 在 $(L(M), \eta)$ 上, $\forall A \in L$, 则 $A^{-c} \leq A^{c^o}, A^{o^c} \leq A^{c^-}$; 若 $(L(M), \eta)$ 还是上全序的, 则 $A^{o^c} = A^{c^-}$, 即这时 A^{o^c} 是闭元.

证明 $\forall a \in M$ 且 $a \not\leq \bar{A}$, 则 $\bar{A} \in \eta(a)$ 且 $\bar{A} \cap A^c \geq A \cap A^c = 1$, 故 a 是 A^c 的内点, $a \leq A^{c^o}$, 从而 $A^{-c} \leq A^{c^o}$. 其次, $\forall a \in M$ 且 $a \not\leq A^\circ$, 则 a 不是 A 的内点. 若 $a \not\leq A^{c^-}$, 则对 $A^{c^-} \in \eta(a)$ 应有 $A^{c^-} \cap A \neq 1$, 矛盾于 $A^{c^-} \cap A \geq A^c \cap A = 1$. 由此知 $A^{o^c} \leq A^{c^-}$.

显然, $A^c \leq A^{o^c}$. 当 $(L(M), \eta)$ 是上全序的 TML 时, 下证 A^{o^c} 是闭元: 设 b 是 A^{o^c} 的任一附着点, 不妨设 $b \not\leq A^{o^c}$, 于是必有 $b \leq A^\circ$. 从而存在 $e \in \beta^*(b)$ 使 $e \not\leq A^{o^c}$ 且 e 是 A 的内点, 故存在 $P \in \eta(e) \subset \eta(b)$ 使 $P \cap A = 1$. 故 $P \cap A^\circ = 1$, 于是 $\forall a \in M, a \not\leq A^\circ$ 则必有 $a \leq P$, 故 $A^{o^c} \leq P$, 这矛盾于附着点的性质. 于是有 $b \leq A^{o^c}$, 故 A^{o^c} 是闭元, 应有 $A^{c^-} \leq A^{o^c}$.

应该注意到, 等式 $A^{c^o} = A^{-c}$ 在 TML 上不必成立. 例如, 取 $L = [0, 1], \eta = \{0, 1\}, A = \frac{1}{2}$, 由定义, $A^{c^o} = 1^\circ = 1$, 但 $A^{-c} = 1^c = 0$, 故 $A^{c^o} \not\leq A^{-c}$.

这个定理说明,虽然 TML 上无“开元”的概念,但某种程度上,“内部”的概念可取而代之.

定义 1.6 设 $A = \{A_\alpha \mid \alpha \in K\} \subset L$, 称 A 是点式局部(余)有限的, 如果 $\forall a \in M^*(1)$, 存在 $P \in \eta(a)$, 使得满足 $P \cap A_\alpha \neq 1$ 的 A_α 只有有限个.

引理 1.7 若 A 是点式局部有限的, 则 $A^\circ = \{A^\circ \mid A \in A\}$ 也是点式局部有限的.

这可以从引理 1.1 中立得.

定理 1.8 设 $(L(M), \eta)$ 是上全序的 TML, $A = \{A_\alpha \mid \alpha \in K\} \subset L$ 是点式局部有限的, 则必有 $(A)^\circ = \bigwedge_{\alpha \in K} A_\alpha^\circ$.

证明 由 $(A)^\circ \leq A_\alpha^\circ$ 知 $(A)^\circ \leq_{\alpha \in K} A_\alpha^\circ$. 反之, 若存在 $a \in M$, $a \leq_{\alpha \in K} A_\alpha^\circ$ 且 $a \not\leq (A)^\circ$, 由 $a \leq$ 每个 A_α° 及上全序的性质^[3], 不妨设 a 是极大点且为每个 A_α 的内点. 由定义 1.6, 存在 $P \in \eta(a)$ 且只有有限个 $A_1, \dots, A_n \in A$, 满足 $P \cap A_i \neq 1$. 对每个 $i \leq n$, a 是 A_i 的内点, 存在 $P_i \in \eta(a)$ 使 $P_i \cap A_i = 1$, 记 $\tilde{P} = P \bigcap_{i=1}^n P_i$, 则 $\tilde{P} \in \eta(a)$ 且 $\forall A \in A, \tilde{P} \cap A = 1$, 从而有 $\tilde{P} \in (A)^\circ = \{ \tilde{P} \cap A \mid A \in A \} = 1 = 1$, 故 a 是 A 的内点, 矛盾. 于是 $\bigwedge_{\alpha \in K} A_\alpha^\circ \leq (A)^\circ$.

2 点式仿紧性

定义 2.1 设 $A, B \subset L$, 且 $A < 1$, 称 B 是 A 的点式余加细, 如果 $\forall B \in B$, 存在 A 使 $M^*(A) \leq B$, 且仍有 $B < 1$.

引理 2.2 在 $(L(M), \eta)$ 上, 设 $A, B \subset L$, 且 $M^*(A) \leq B$, 则 $A^\circ \leq B^\circ$.

这由“内部”的定义易知, 证略.

定义 2.3 称 TML $(L(M), \eta)$ 是点式仿紧的, 如果 L 上每个 PRF 有一个点式局部有限闭余加细.

由这个定义知, 点式紧性是点式仿紧性的特款, 两者不等价是显然的.

定义 2.4 设 $A \subset L$, 称 A 是点式 σ 局部有限的, 如果 $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ 且每个 A_i 是点式局有限的.

引理 2.5 设 $(L(M), \eta)$ 是上全序的, 则它的任一个点式 σ 局部有限闭余覆盖有一个局部有限余加细(不必是闭元族).

证明 设 $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i \subset \eta$, 每个 A_i 是点式局部有限的, 且 $A < 1$. 不妨设 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \emptyset$. $\forall A \in A$, 存在唯一 $k \in \omega$, 使 $A \cap A_k \neq \emptyset$. 记

$$A_k^* = A \bigcap_{i < k} (A_i)^c, A_k^* = \{A_k^* \mid A \in A\}, A^* = \bigcup_{k \in \omega} A_k^*.$$

下证 A^* 是 A 的点式局部有限余加细:

显然每个 $A_k^* \geq A$, 故 $M^*(A) \leq A_k^*$. $\forall a \in M^*(1)$, 由 $A < 1$ 知存在最小的 k , 使得存在 $A \in A_k$, $a \not\leq A$. 于是 $a \leq_{i < k} (A_i)$, 从而 $a \not\leq A_k^*$, 故 $A^* < 1$.

另一方面, $\forall i > k, \forall B \in A_i$, 可证 $A \cap B_i^* = A \cap B \bigcap_{j < i} (A_j)^c = 1$. 事实上, $\forall b$ 是 L 的极大点, 若 $b \not\leq A, b \not\leq B_i^*$, 则 $b \not\leq_{j < i} (A_j)^c$, 故 $b \leq_{j < i} (A_j) \leq_{j \leq k} (A_j)$

$\leq A$, 矛盾. 而对每个 $i \leq k$, 由 A_i 点式局部有限, 对上述之 a , 存在 $P_i \in \eta(a)$ 使 A_i 中满足 $A \cap P_i \neq 1$ 的元只有有限个, 故 A_i^* 亦然. 令 $P = A \cap (\bigcap_{i \leq k} P_i)$, 则当 $i \leq k$ 时满足 $Q \cap P \neq 1$ 的元 Q 在 A_i^* 中只有有限个; 而当 $i > k$ 时, $\forall B_i^* \in A_i$, 均有 $B_i^* \cap P = 1$, 从而 A^* 是局部有限的.

定义 2.6 称 $(L(M), \eta)$ 是点式正则的, 如果 $\forall a \in M^*(1), A \in \eta(a)$, 存在 $P \in \eta(a), Q \in \eta$, 使 $P \cap Q = 1$ 且 $\forall b \in M^*(A)$, 有 $b \not\leq Q$.

由引理 1.1 知, 这时必有 $P^0 \cap Q = 1$ 且 $P \cap Q^0 = 1$, 由此易知 $M^*(A) \leq P^0$.

笔者曾在 [4] 中定义过一种正则性, 显然, 正则 $\Rightarrow$ 点式正则, 且两者并不等价.

定义 2.7 设 $F \subset \eta, F < 1$, 若存在 $W \subset \eta, W < 1$ 且 $\forall W \in W$, 存在 $F \cap F$, 使 $M^*(F) \leq W^0$, 则称 W 是 F 的点式内部余加细.

引理 2.8 若 $(L(M), \eta)$ 是点式正则的, F 是 L 上任一 PRF, 则存在 W 是 F 的点式内部闭余加细.

证明 $\forall a \in M^*(1)$, 存在 $F(a) \in F$, 使 $a \not\leq F(a)$. 由定义 2.6, 存在 $W_a \in \eta(a), Q_a \in \eta$, 使 $W_a \cap Q_a = 1$ 且 $M^*(F(a)) \leq W_a^0$. 记 $W = \{W_a \mid a \in M^*(1)\}$, 显然 W 即为所求.

引理 2.9 设 $(L(M), \eta)$ 是上全序的 TML, 且为点式正则的, 以及 L 的每个 PRF 有一个点式局部有限余加细, 则对 L 的每个 PRF $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$, 存在 $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \kappa} \subset L$, 使 $\forall \alpha \in \kappa$, 有 $M^*(F_\alpha) \leq U_\alpha^0$, 且 $U < 1$, 以及 $U^0 = \{U_\alpha^0\}_{\alpha \in \kappa}$ 是点式局部有限的.

证明 由点正则性, 存在 W 是 PRF 且 W 是 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$ 的点式余加细, 这里 $W^0 = \{W^0 \cap W\}$, 取 W 的一个点式局部有限余加细 $A = \{A_t\}_{t \in T}$, 对每个 $t \in T$, 选取 $\alpha(t) \in \kappa$, 使得 $M^*(F_{\alpha(t)}) \leq W^0 \leq A_t^0$, 记 $U_\alpha = \bigcap_{\alpha(t)=\alpha} A_t^0$, 由定理 1.8 知 $U_\alpha = U_\alpha^0$, 记 $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$, 则 $U^0 = U$. 下证 U 即为题设所求:

事实上, 由 $A < 1$ 知 $U < 1$. 显然 $M^*(F_\alpha) \leq U_\alpha^0 = U_\alpha, \forall \alpha \in M^*(1)$, 由 A 的局部有限性, 存在 $P \in \eta(a)$, 使满足 $P \cap A_t^0 \neq 1$ 的 A_t 只有有限个, 记为 $A_{t_1}, A_{t_2} \dots A_{t_n}$, 于是, $\forall \alpha \in \kappa - \{\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)\}$, 均有 $P \cap U_\alpha = P \cap (\bigcap_{\alpha(t)=\alpha} A_t^0) = \bigcap_{\alpha(t)=\alpha} (P \cap A_t^0) = 1 = 1$, 从而 U 是点式局部有限的.

定理 2.10 设上全序的 TML $(L(M), \eta)$ 是点式正则的, 则以下各条等价:

- (i) L 是点式仿紧的.
- (ii) L 的每个 PRF 有一个 σ 点式局部有限闭余加细.
- (iii) L 的每个 PRF 有一个点式局部有限余加细.
- (iv) L 的每个 PRF 有一个点式局部有限内部余加细.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 显然, (ii) $\Rightarrow$ (iii) 由引理 2.5 知; (iii) $\Rightarrow$ (iv) 由引理 2.9 知. 下证 (iv) $\Rightarrow$ (i): 设 $F \subset \eta$ 且 $F < 1$. 由 (iv) 存在 $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$ 使 $\forall \alpha \in \kappa$ 存在 $F_\alpha \in F$, 使 $M^*(F_\alpha) \leq U_\alpha^0, U < 1$ 且 $U^0 = \{U_\alpha^0\}_{\alpha \in \kappa}$ 点式局部有限.

$\forall a \in M^*(1)$, 存在 $V_a \in \eta(a)$ 使满足 $U_\alpha^0 \cap V_a \neq 1$ 的 U_α 只有有限个. 记 $V = \{V_a \mid a \in M^*(1)\}$, 它是 PRF, 有一个点式局部有限内部余加细 B , 对每个 $U_\alpha \in U$, 记 $D_\alpha = \{B^0$

$B \quad B \text{ 且 } B^\circ \quad U_\alpha^\circ = 1\}$, 由定理 1.8, $D_\alpha = D_\alpha^\circ$, 再由定理 1.5, $D_\alpha^c = D_\alpha^{\circ c} = D_\alpha^{c\circ}$ 是闭元. 现证:

$$\forall B \quad B, B^\circ \quad D_\alpha^c = 1 \Leftrightarrow B^\circ \quad U_\alpha^\circ = 1. \quad (1)$$

事实上, $\forall a \quad M^*(1)$, 若 $a \not\leq D_\alpha$, 则存在 $\tilde{B} \quad B, a \not\leq \tilde{B}^\circ$ 且 $\tilde{B}^\circ \quad U_\alpha^\circ = 1$, 故 $a \leq U_\alpha^\circ$, 故 $D_\alpha^c \leq U_\alpha^\circ$, 于是 $B^\circ \quad U_\alpha^\circ \geq B^\circ \quad D_\alpha^c$; 反之, 设 $B^\circ \quad U_\alpha^\circ = 1$, 则 $D_\alpha \leq B^\circ$, 若存在 $b \quad M^*(1)$ 使 $b \not\leq B^\circ \quad D_\alpha^c$, 则必有 $b \leq D_\alpha \leq B^\circ$ 矛盾, 故 $B^\circ \quad D_\alpha^c = 1$.

记 $W_\alpha = F_\alpha \quad D_\alpha^c$, 它是闭元, 再记 $W = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \kappa} \subset \eta$, 下证 W 就是 F 的点式局部有限闭余加细:

显然 $M^*(F_\alpha) \leq W_\alpha$, 又 $\forall a \quad M^*(1)$, 存在 $U_\alpha \quad U$, 使 $a \not\leq U_\alpha$, 则易知 $a \not\leq F_\alpha$, (否则 $a \leq M^*(F_\alpha) \leq U_\alpha^\circ \leq U_\alpha$) 又由(1)式之证得 $D_\alpha^c \leq U_\alpha^\circ$, 所以 $a \not\leq D_\alpha^c$, 故 W 是 L 上的 PRF. 更进一步, 对这个 a , 存在 $P \quad \eta(a)$ 使只有有限个 $B_i^\circ \quad B^\circ$, 满足 $P \quad B_i^\circ \neq 1$. ($i = 1, \dots, n$) 记 $G = \bigcap_{i=1}^n B_i^\circ$, 知 $G = G^\circ$. 下证 $G \leq P$: 否则, 由[4]引理 2.3 可设 $b \quad M^*(1)$, 使 $b \leq G^\circ$ 且 $b \not\leq P$. 由 $B < 1$ 知, 存在 $B \quad B, b \not\leq B^\circ$. 显然 B 不是上述 B_i 之一, 应有 $P \quad B^\circ = 1 \geq b$, 矛盾. 于是, 对每个 $i \leq n$, 则由 V 及 B 之定义, 存在 $a_i \quad M^*(1)$, 使 $V_{a_i} \quad \eta(a_i)$ 且 $M^*(V_{a_i}) \leq B_i^\circ$, 由引理 1.1 及 V 的取法, 每个 $M^*(V_{a_i})$ 至多与有限个 U_α° 之并 $\neq 1$, 从而 B_i° 亦然. 由(1)式知, 至多有有限个 D_α° , 使 $B_i^\circ \quad D_\alpha^{\circ c} \neq 1$, 从而 $G = \bigcap_{i=1}^n B_i^\circ$ 亦然. 而 $G \leq P$, $D_\alpha^c \leq W_\alpha$, 故 W 中至多有有限个 W_α 满足 $P \quad W_\alpha \neq 1$, 于是 W 合乎要求, $(L(M), \eta)$ 是点式仿紧的.

定义 2.11 称 $(L(M), \eta)$ 是点式正规的, 如果 $\forall A, B \quad \eta$, 且 $M^*(A) \neq \emptyset, M^*(B) \neq \emptyset, \forall a \quad M^*(A), a \not\leq B, \forall b \quad M^*(B), b \not\leq A$, 则存在 $P, Q \quad \eta, P \quad Q = 1$ 且满足 $\forall a \quad M^*(A), a \not\leq P, \forall b \quad M^*(B), b \not\leq Q$.

由“内部”的定义, 不难知这时 $M^*(A) \leq Q^\circ, M^*(B) \leq P^\circ$, 且易知正规^[4] $\Rightarrow$ 点式正规, 但二者不等价.

引理 2.12 $(L(M), \eta)$ 是点式正规的 $\Leftrightarrow \forall A, B \quad \eta$ 且满足定义 2.11 的条件, 则存在可数对闭元 $V_i, W_i \quad \eta$, 使 $\forall i \in \omega, \forall b \quad M^*(B)$ 有 $b \not\leq V_i, M^*(B) \leq W_i, W_i \quad V_i = 1$ 且 $\forall a \quad M^*(A), a \not\leq \bigcap_{i \in \omega} W_i$.

此引理证法与[4]中引理 3.2 证明基本一致, 只需把对 A 中成份的讨论改对 A 中所含 L 的极大点讨论即可, 此处从略.

定理 2.13 上全序点式正则仿紧的 TML 是点式正规的.

证明 设 $(L(M), \eta)$ 是上全序、点式正则、点式仿紧的, $\forall A, B \quad \eta$ 且满足定义 2.11 的条件. $\forall a \quad M^*(A)$, 由点正则性, 存在 $W_a \quad \eta(a), V_a \quad \eta$, 使 $\forall b \quad M^*(B), b \not\leq V_a$ 且有 $V_a \quad W_a = 1$. 这时, 有 $M^*(B) \leq W_a^\circ$. 于是, $\{W_a \quad a \quad M^*(A)\} \quad \{A\}$ 构成 L 的 PRF, 存在 $U = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$ 是它的 σ 点式局部有限闭余加细, 满足 $U < 1$ 且每个 U_i 是点式局部有限的. $\forall i \in \omega$, 定义 $W_i = \{U \quad U_i \quad A \not\leq U\}, V_i = W_i^{\circ c}$. 由定理 1.8 知 $W_i^\circ = \{U^\circ \quad U \quad U_i, A \not\leq U\}$ 以及 $V_i = W_i^{c\circ}$ 是闭元, 下证闭元对 $\{W_i, V_i\}_{i \in \omega}$ 合乎引理 2.12 的条件:

事实上, $\forall U \quad U_i \subset U$, 若 $A \not\leq U$, 由余加细的定义, 存在某个 W_a 使 $M^*(W_a) \leq U$, 于是 $M^*(B) \leq U$, 所以 $M^*(B) \leq W_i$; 并且, $\forall b \in M^*(B)$ 由 $M^*(B) \leq W_a^o$, 易知 $b \leq U^o$, 故 $b \leq W_i^o$, 由上全序性, $b \leq W_i^o = V_i$; 而对 $\forall a \in M^*(A)$, 由 $U < 1$ 知存在 $U \quad U_{i_0} \subset U$ 使 $a \not\leq U$, 故 $A \not\leq U$, 且 $a \not\leq W_{i_0}$, 从而 $a \not\leq_{i_0} W_i$; 最后, 显然

$$W_i \quad V_i = W_i \quad W_i^{o^c} = 1.$$

由这个定理及定理 2.10 可立得

推论 2.14 上全序、点正则、 P -Lindelöf^[3] 的 TML 是点式仿紧的, 从而是点式正规的.

定理 2.15 上全序、 T_2 ^[1]、点式仿紧的 TML 是点式正规的.

证明 由 2.13, 只须证 $(L(M), \eta)$ 是点式正则的. $\forall a \in M^*(1), A \in \eta(a)$, 不妨设 $M^*(A) \neq \emptyset$. $\forall b \in M^*(A)$, 由上全序性, $a \quad b = 0$, 故存在 $P_b \in \eta(a), Q_b \in \eta(b)$ 使 $P_b \quad Q_b = 1$, 这时 $a \leq Q_b^o$. 于是 $\{Q_b \quad b \in M^*(A)\} \quad \{A\}$ 构成 L 上的 PRF, 它有一个点式局部有限闭余加细 U .

让 $W = \{U \quad U \quad A \not\leq U\}$, $W = W$. 易知 $\forall b \in M^*(A), b \not\leq W$. 取 $V = W^{o^c}$, 由 1.5 及 1.8 知 $V \in \eta$ 且 $W^o = \{U^o \quad U \in W\}$. 对 $\forall U \in W$, 存在 $b \in M^*(A)$, 使 $M^*(Q_b) \leq U$. 由引理 2.2, $a \leq Q_b^o \leq U^o$, 故 $a \leq W^o$, 从而 $a \leq W^{o^c}$. 而 $W^{o^c} \quad W = 1$, 故 $(L(M), \eta)$ 是点式正则的.

参 考 文 献

- [1] 王国俊, 完全分配格上的点式拓扑(), (), 陕西师大学报(自然科学版), 1(1985), 1 - 17; 2(1985), 1 - 5.
- [2] 罗懋康, Fuzzy 拓扑空间的仿紧性与紧性, 数学学报, 4(1987), 548 - 552.
- [3] 刘晓石, 格上点式拓扑的点式紧性, 成都科技大学学报, 2(1992), 35 - 40.
- [4] 刘晓石, 完全分配格上拓扑的“内部”运算及正则、正规性, 东北数学, 5:1(1989), 118 - 126.

A Paracompactness on Topological Molecular Lattices

Liu Xiaoshi

(Dept. of Appl. Math., Sichuan Union University, 610065)

Abstract

A pointwise paracompactness on topological molecular lattices (TML) was discussed. It is a generalization for the pointwise compactness. We discuss its some forms on TML and the relations to the normality on lattices.

Keywords pointwise paracompactness, σ -locally finite, contrary element.