

一类 q -级数恒等式的新证法*

赵 凤 珍

(大连理工大学应用数学系, 大连 116024)

摘 要 本文利用一个已知的变换公式及其它基本超几何函数的求和公式, 给出了一类 q -级数恒等式的新的更简单的证明, 并建立了该类恒等式的一般形式.

关键词 基本超几何函数, 分拆恒等式, q -级数.

分类号 AMS(1991) 05A/CCL O157.1

采用通常的二项式系数记号

$$\begin{cases} \binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!n!}, & 0 \leq n \leq m, \\ 0, & m < n, \end{cases} \end{cases},$$

$$(x, y)_{\infty} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - xy^{k-1}),$$

其中 x, y 均为实数.

引理 1^[1] 若 $|t| < 1, |q| < 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, q)_n t^n}{(q, q)_n} = \frac{(at, q)_{\infty}}{(t, q)_{\infty}}$.

引理 2^[1] 若 $|q| < 1$, 则 $(q, q^2)_{\infty} (-q, q)_{\infty} = 1$.

引理 3^[1] 若 $|q| < 1, t \neq 0$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} t^n = (q^2, q^2)_{\infty} (-tq, q^2)_{\infty} (t^{-1}q, q^2)_{\infty}$.

另外, 为保证求和有意义, 本文的 t, q 都满足引理 1 的条件, 以后不再声明.

I. Gessel 与 D. Stanton 在文 [2] 给出一个优美的恒等式

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q, q)_n} = \frac{(-q, q)_{\infty} (-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}}. \quad (1)$$

本文用一种更为简单的方法证明式 (1), 并建立了该类恒等式的一般形式.

下面给出式 (1) 的新证法:

首先给出已知的一个基本恒等式^[3]

* 1995 年 3 月 30 日收到. 1998 年 2 月 19 日收到修改稿.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n (t, q)_n q^{\binom{n}{2}}}{(q, q)_n (at, q)_n} = \frac{(c, q)_{\infty} (t, q)_{\infty}}{(at, q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, q)_n t^n}{(q, q)_n (c, q)_n} \quad (2)$$

由式(2)易得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n (-q, q)_n q^{\binom{n}{2}}}{(q, q)_n} = (c, q)_{\infty} (-q, q)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)^n}{(q, q)_n (c, q)_n} \quad (3)$$

记 $X_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n}{2} + n}}{(q, q)_n}$, 则 $X_0 - X_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q, q)_n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q, q)_n}$. 由式(3)及引理1得

$$X_0 - X_1 = (-q, q)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)^n}{(q^2, q^2)_n} = \frac{(-q, q)_{\infty}^2}{(-q, q^2)_{\infty}} = (-q, q)_{\infty} (-q^2, q^2)_{\infty}.$$

同理 $X_0 + X_1 = 1 + (-q, q)_{\infty} \left\{ \frac{1}{(-q, q^2)_{\infty}} + \frac{1}{(-q^2, q^2)_{\infty}} \right\}$, 由引理2得

$$X_0 + X_1 = (-q, q)_{\infty} \{ (q, q^2)_{\infty} + (-q, q^2)_{\infty} + (-q^2, q^2)_{\infty} \}.$$

因此

$$X_0 = (-q, q)_{\infty} \{ (-q^2, q^2)_{\infty} + \frac{1}{2} ((q, q^2)_{\infty} + (-q, q^2)_{\infty}) \},$$

$$X_1 = \frac{1}{2} (-q, q)_{\infty} \{ (q, q^2)_{\infty} + (-q, q^2)_{\infty} \}.$$

由于 $\frac{1}{2} \{ (q, q^2)_{\infty} + (-q, q^2)_{\infty} \} = \frac{1}{2} \{ (q, q^4)_{\infty} (q^3, q^4)_{\infty} + (-q, q^4)_{\infty} (-q^3, q^4)_{\infty} \}$, 两次利

用引理3得 $\frac{1}{2} \{ (q, q^2)_{\infty} + (-q, q^2)_{\infty} \} = \frac{(-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}}$, 所以

$$X_0 = (-q, q)_{\infty} \{ (-q^2, q^2)_{\infty} + \frac{(-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}} \},$$

$$X_1 = \frac{(-q, q)_{\infty} (-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}}. \quad \square$$

在证明式(1)时, 又得到一个与式(1)类似的恒等式

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n}{2}}}{(q, q)_n} = (-q, q)_{\infty} \{ (-q^2, q^2)_{\infty} + \frac{(-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}} \}.$$

类似地, 还可得到一系列与式(1)相似的恒等式及式(1)的一般形式:

定理1

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n}{2} + 2n}}{(q, q)_n} \\ = (-q, q)_{\infty} \{ (-q^2, q^2)_{\infty} - \frac{q(-q^{14}, q^{16})_{\infty} (-q^2, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}} \}. \end{aligned}$$

当 $q \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n}{2} + 3n}}{(q, q)_n} \\ = (-q, q)_{\infty} \left\{ \frac{(-q, q^2)_{\infty}}{q} - \left(1 + \frac{1}{q}\right) (-q^2, q^2)_{\infty} + \frac{(-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n}{2} - n}}{(q, q)_n} \\
= (-q, q)_{\infty} \left(1 + \frac{1}{q}\right) (-q^2, q^2)_{\infty} + \frac{(-q, q^2)_{\infty}}{q} + \frac{(-q^{10}, q^{16})_{\infty} (-q^6, q^{16})_{\infty} (q^{16}, q^{16})_{\infty}}{(q^4, q^4)_{\infty}} \}.
\end{aligned}$$

定理 2 当 s 为非负整数时,

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q, q)_{n-1} q^{\binom{n}{2} + ns}}{(q, q)_n} \\
= (-q, q)_{\infty} \frac{(q, q^2)_{\infty}}{2} + \frac{1}{2} (-q, q)_{\infty} \left(1 + \frac{1}{q^s}\right) \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} q^n}{(q, q)_{n-s} (-q, q)_n} \\
+ \frac{(-q, q)_{\infty}}{2 q^s} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} q^{2n}}{(q, q)_{n-s} (-q, q)_n} \}.
\end{aligned}$$

证明 由式(3)得

$$\begin{cases} X_s - X_{s+1} = (-q, q)_{\infty} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(-1)^{n-s} q^n}{(q, q)_{n-s} (-q, q)_n} \\ X_s + X_{s+1} = (-q, q)_{\infty} \left\{ (q, q^2)_{\infty} + (-q, q)_{\infty} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(-1)^{n-s} q^{n-s} (1+q^n)}{(q, q)_{n-s} (-q, q)_n} \right\}, \end{cases}$$