第 18 卷第 3 期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 3
1998 年 8 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1998

关于微分算子的若干恒等式与 Hermite 多项式*

刘 治 国

(河南新乡教育学院,453000)

摘 要 通过求解一个偏微分方程,得到了若干微分算子恒等式. 利用这些恒等式,很自然地推出了关于 Hermite 多项式的一些著名结果.

关键词 微分算子恒等式,Hermite 多项式,偏微分方程.

分类号 AMS(1991) 35C10,33C25/ CCL O175.3,O174.6

1 引 言

著名的 Hermite 多项式的定义为[1]

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!} (2x)^{n-2k}, \tag{1}$$

其生成函数为

$$\exp(-t^2 + 2xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \tag{2}$$

本文利用求解偏微分方程的技巧,建立了若干与 Hermite 多项式相关的微分算子恒等式. 利用这些恒等式研究了 Hermite 多项式,很自然地推出了一些著名的结论.

2 一个偏微分方程的解

设 $f(x)$ 为 x 之解析函数,容易验证 $\exp(-t^2 + 2xt) f(x - t)$ 为下列偏微分方程之解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (2x - D)\{u(x,t)\}, & (3) \\ u(x,0) = f(x). & (4) \end{cases}$$

比较上式两边 t^{n+1} 之系数得

$$A_n(x) = (2x - D)\{A_{n-1}(x)\},$$

由上式易得

$$A_n(x) = (2x - D)^n\{A_0(x)\} = (2x - D)^n\{f(x)\},$$

所以有

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(2x - D)^n\{f(x)\} = \exp(2xt - tD)\{f(x)\}.$$

因此,有

定理 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(2x - D)^n\{f(x)\} = \exp(-t^2 + 2xt)f(x - t), \tag{6}$$

或

$$\exp(2xt - tD)\{f(x)\} = \exp(-t^2 + 2xt)f(x - t). \tag{7}$$

由 Taylor 公式知 $f(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}D^n\{f(x)\}$,将上式及(2)代入(6)并比较 t^n 之系数得

定理 2

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}H_{n-k}(x)D^k\{f(x)\} = (2x - D)^n\{f(x)\}. \tag{8}$$

(8)就是著名的 Burchnall 公式[2].

在(8)中取 $f(x)\equiv 1$,马上有

$$H_n(x) = (2x - D)^n\{1\}. \tag{9}$$

由(9),有

$$H_{n+m}(x) = (2x - D)^n(2x - D)^m\{1\} = (2x - D)^n\{H_m(x)\}. \tag{10}$$

在(6)中取 $f(x) = H_m(x)$ 并应用(10),得

定理 3

$$\exp(-t^2 + 2xt)H_m(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty}H_{n+m}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{11}$$

从(2),(7)和(10),有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n+m}(x)\frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}(2x - D)^n\{H_m(x)\}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(2x - D)^n\{\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{s^m}{m!}\}\\ &= \exp(2tx - tD)\{\exp(-s^2 + 2sx)\}\\ &= \exp(-2st)\exp(-t^2 + 2xt)\exp(-s^2 + 2sx).\end{aligned}$$

因此,得

定理 4

$$\exp(-2st)\exp(-t^2 + 2xt)\exp(-s^2 + 2sx) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n+m}(x)\frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}. \tag{12}$$

将 $\exp(-t^2+2xt)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$,$\exp(-s^2+2xs)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{s^n}{n!}$ 及 $\exp(-2st)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2st)^n}{n!}$ 代入(12),然后利用比较系数的方法得

定理 5

$$H_{n+m}(x)=\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}}(-2)^k k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}H_{n-k}(x)H_{m-k}(x),\tag{13}$$

在(12)两边乘以 $\exp(2st)$ 并比 $s^m t^n$ 之系数得

定理 6

$$H_n(x)H_m(x)=\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}}2^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{n+m-2k}(x).\tag{14}$$

(14)及(13)分别是 Hermite 多项式的线性化公式及其逆[3].

3　Mehler 公式的算子形式

若 $a>0$,熟知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a\lambda^2)d\lambda=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.\tag{15}$$

在上式两边关于 a 求 m 次导再令 $a=1$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{2m}\exp(-\lambda^2)d\lambda=\sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{4^m m!}.\tag{16}$$

若 $m\geq 1$ 为整数,$\lambda^{2m-1}\exp(-\lambda^2)$ 为奇函数,故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{2m-1}\exp(-\lambda^2)d\lambda=0.\tag{17}$$

利用(15)易得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a\lambda^2+b\lambda)d\lambda=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).\tag{18}$$

由(2)易知

$$\exp(-(1+t^2)\lambda^2+2\lambda xt)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{H_n(x)}{n!}(\lambda t)^n\exp(-\lambda^2),$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-(1+t^2)\lambda^2+2\lambda xt)d\lambda=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^n\exp(-\lambda^2)d\lambda。$$

由(16),(17)及(18)知上式可简化为:

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{x^2t^2}{1+t^2}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{2m}(x)}{m!}\left(\frac{t^2}{4}\right)^m。\tag{19}$$

将 t 用 $it\,(i=\sqrt{-1})$ 替代,有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{2m}(x)}{m!}\left(-\frac{t^2}{4}\right)^m=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-t^2x^2}{1-t^2}\right).\tag{20}$$

(20) 可被写为

$$\exp\left(-\frac{t^2}{4}(2x-D)^2\right)\{1\}=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-t^2x^2}{1-t^2}\right). \tag{21}$$

由(7)和(21),得到

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{t^2}{4}(2x-D)^2+ty(2x-D)\right)\{1\}&=\exp(ty(2x-D))\exp\left(-\frac{t^2}{4}(2x-D)^2\right)\{1\}\\&=\exp(ty(2x-D))\left\{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-t^2x^2}{1-t^2}\right)\right\}\\&=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right).\end{aligned}$$

因此,有

定理 7

$$\exp\left(-\frac{t^2}{4}(2x-D)^2+ty(2x-D)\right)\{1\}=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right). \tag{22}$$

但是由(2)和(9),知

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(y)}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n(2x-D)^n\{1\}\\&=\exp\left(-\frac{t^2}{4}(2x-D)^2+ty(2x-D)\right)\{1\}.\end{aligned}$$

所以有

定理 8

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right). \tag{23}$$

(23) 就是著名的 Mehler 公式[4]. 更进一步,从(2),(9)和(22)知

$$\begin{aligned}&\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{H_{n_1+\cdots+n_r}(x)H_{n_1}(y_1)\cdots H_{n_r}(y_r)}{n_1!\cdots n_r!}\left(\frac{t_1}{2}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{t_r}{2}\right)^{n_r}\\&=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{H_{n_1}(y_1)}{n_1!}\left(\frac{2xt_1-Dt_1}{2}\right)^{n_1}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{H_{n_r}(y_r)}{n_r!}\left(\frac{2xt_r-Dt_r}{2}\right)^{n_r}\{1\}\\&=\exp\left(\frac{-(t_1^2+\cdots+t_r^2)}{4}(2x-D)^2+(t_1y_1+\cdots+t_ry_r)(2x-D)\right)\{1\}\\&=(1-t_1^2-\cdots-t_r^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2x(t_1y_1+\cdots+t_ry_r)-x^2(t_1^2+\cdots+t_r^2)-(t_1y_1+\cdots+t_ry_r)^2}{1-t_1^2-\cdots-t_r^2}\right)\end{aligned}$$

所以有

定理 8

$$\begin{aligned}&\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{H_{n_1+\cdots+n_r}(x)H_{n_1}(y_1)\cdots H_{n_r}(y_r)}{n_1!\cdots n_r!}\left(\frac{t_1}{2}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{t_r}{2}\right)^{n_r}\\&=(1-t_1^2-\cdots-t_r^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2x(t_1y_1+\cdots+t_ry_r)-x^2(t_1^2+\cdots+t_r^2)-(t_1y_1+\cdots+t_ry_r)^2}{1-t_1^2-\cdots-t_r^2}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

(24) 是著名的 Kibble-Slepian 公式[4]. 用 $(2x-D)$ 作用于(23)两边得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n=\frac{2(x-yt)}{(1-t^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right),$$

将上式中的 x **与** y **交换,然后将所得式子与上式相减得**

定理 9

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x))}{2(x-y)n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n=(1-t)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right). \tag{25}$$

比较上式两边 t^n **之系数得**

定理 10

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(H_k(x)H_k(y)}{2^k k!}=\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_n(x)H_{n+1}(y)}{2^{n+1}n!(x-y)}. \tag{26}$$

(26) **即著名的** Christoffel **公式**[1].

参 考 文 献

[1] 王竹溪、郭敦仁,特殊函数概论,科学出版社,1979,360 - 377.

[2] J.L.Burchnall, *A note on the polynomials of Hermite*, Quarterly J. of Math (Oxf), 1941, 9 - 11.

[3] S. K. Chatterjea and H. M. Srivastava, *Operational representations for the classical Hermite polynomials*, Studies in Applied Math., 1990, 319 - 328.

[4] J. D. Louck, *Extension of the Kibble-Slepian formula for Hermite polynomials using Boson operator methods*, Advances in Appl. Math., 1981, 239 - 249.

Some Identities of Differential Operator and Hermite Polynomials

Liu Zhiguo

(Xinxiang Education College, Henan 453000)

Abstract

Some identities of differential operator are obtained by solving a partial differential equation. Approach to Hermite polynomials by these identities, many well-known results including Burchnall's, Mehler's, and Kibble-Slepian's are derived natrually.

Keywords identity of differential operator, Hermite polynomials, partial differential equation, Buchnall's formula, Mehler's formula, Kibble-Slepian's formula.