第 18 卷第 3 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 18 No. 3
1998 年 8 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1998

强相关平稳 Gauss 过程高水平穿过和最大值的弱收敛*

王晓明　　王雪标
(海军大连舰艇学院, 大连 116013)　(东北财经大学, 大连 116023)

摘　要　设$\{\xi(t), t\geq 0\}$是强相关不可微 Gauss 过程, 即其相关函数 $R(t)$ 满足: $R(t)\log t\to\gamma>0\ (t\to\infty)$ 和 $R(t)=1-C|t|^{\alpha}+o(|t|^{\alpha})\ (t\to 0)$, 且 $0<\alpha\leq 2$, $C>0$. 本文建立了$\{\xi(t), t\geq 0\}$对一个和多个高水平的 ε 上穿点过程的极限定理, 并给出了最大值的极限分布和局部 ε 最大值的联合渐近分布.

关键词　强相关, 高水平穿过, cox 过程.

分类号　AMS(1991) 60G15, 60G17/ CCL O211.61

1　引　言

设$\{\xi(t), t\geq 0\}$是平稳 Gauss 过程, 且 $E[\xi(t)]=0$, $E[\xi^2(t)]=1$. 本文总假定其相关函数 $R(t)$ 在零点具有性质

$$R(t)=1-C|t|^{\alpha}+o(|t|^{\alpha})\quad(t\to 0),\tag{1.1}$$

其中 $0<\alpha\leq 2$, $C>0$. 本文还假定$\{\xi(t), t\geq 0\}$有连续的样本函数, 并且记 $M(T)=\sup\{\xi(t), 0\leq t\leq T\}$. 令

$$H_\alpha=\lim_{T\to\infty}T^{-1}\int_{-\infty}^{0}e^{-x}P\{\sup_{0\leq t\leq T}Y_0(t)>-x\}\,dx,$$

$$a_T=(2\log T)^{1/2},$$

$$b_T=(2\log T)^{1/2}+(2\log T)^{-1/2}\{(2-\alpha)/2\alpha\log\log T+\log(C^{1/\alpha}H_\alpha(2\pi)^{-1/2}2^{(2-\alpha)/2\alpha})\},$$

其中$\{Y_0(t)\}$是非平稳 Gauss 过程, 其均值函数为 $-|t|^{\alpha}$, 协方差函数为$|s|^{\alpha}+|t|^{\alpha}-|t-s|^{\alpha}$, 且 $H_\alpha>0$. 在(1.1)和条件

$$R(t)\log t\to 0\quad(t\to\infty)\tag{1.2}$$

之下, Pickands 已经证明$\lim\limits_{T\to\infty}P(a_T(M(T)-b_T)\leq x)=\exp(-e^{-x})$. 在同样条件下, Pickands, Qualls 和 Watanabe 等人还得到了高水平 ε 上穿点过程收敛于 Poisson 过程的结果. 本文将在强相关条件

$$R(t)\log t\to\gamma>0\quad(t\to\infty)\tag{1.3}$$

之下讨论上穿点过程的弱收敛和最大值、局部最大值的极限分布.

* 1995 年 9 月 12 日收到. 1998 年 5 月 12 日收到修改稿.

2　关于一个高水平的 ε-上穿问题

记 $\rho(T)=\gamma/\log T$, $\gamma>0$, $\mu=\mu(u)=C^{1/\alpha}H_\alpha u^{2/\alpha}\phi(u)/u$,其中 $\phi(\cdot)$ 表示标准正态 r.v. 的概率密度函数.

引理 2.1　设 $\{\xi(t), t\geq 0\}$ 是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程,其相关函数 $R(t)$ 满足(1.1)和(1.3). 令 $d>0$ 是常数,且假设当 $T\to\infty$ 时, $T\mu\to\tau>0$, 因此 $u\sim(2\log T)^{1/2}$. 取 $q=q_T\to 0$ 是满足当 $T\to\infty$ 时, $u^{2/\alpha}q\to a>0$ 的变量,则对给定的 $\sigma>0$ 有

$$dT/q\sum_{\sigma\leq kq\leq dT}|R(kq)-\rho(T)|\exp\{-\frac{u^2}{1+a(kq)}\}\to 0\ (T\to\infty),\tag{2.1}$$

其中 $a(t)=\max\{|R(t)|,\rho(T)\}$.

证明　令 $\delta(t)=\sup_{t\leq s\leq dT}a(s)$, 显然 $0<\delta(\sigma)<1$. 选择常数 β, 使其满足不等式 $0<\beta<(1-\delta(\sigma))/(1+\delta(\sigma))$, 易知

$$dT/q\sum_{\sigma\leq kq\leq T^\beta}|R(kq)-\rho(T)|\exp\{-\frac{u^2}{1+a(kq)}\}\to 0\ (T\to\infty).\tag{2.2}$$

由(1.3)知, $\delta(t)\log t\leq M(>0)$, 因此对 $kq\geq T^\beta$, 有 $a(kq)\leq\delta(T^\beta)\leq M/\log T^\beta$ (M 是某个常数), 且

$$\begin{aligned}&dT/q\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|R(kq)-\rho(T)|\exp\{-\frac{u^2}{1+a(kq)}\}\\&\leq\frac{dT}{q}\exp\{-u^2(1-M/\log T^\beta)\}\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|R(kq)-\rho(T)|\\&\leq\frac{K}{(u^{2/\alpha}q)^2}\frac{q}{T}\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|R(kq)\log kq-\gamma|+\frac{\gamma\beta q}{T}\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|1-\frac{\log T}{\log kq}|),\end{aligned}$$

其中 K 为正常数. 由 $R(t)\log t\to\gamma$ 得到 $\frac{q}{T}\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|R(kq)\log kq-\gamma|\to 0\ (T\to\infty)$, 而对括号中第二式, 有 $\frac{q}{T}\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|1-\log T/\log kq|\leq K/\log T\int_0^1|\log x|\,dx\to 0\ (T\to\infty)$.

因为 $u^{2/\alpha}q\to a>0\ (t\to\infty)$, 因此

$$\frac{dT}{q}\sum_{T^\beta<kq\leq dT}|R(kq)-\rho(T)|\exp\{-\frac{u^2}{1+a(kq)}\}\to 0\ (T\to\infty).\tag{2.3}$$

结合(2.2)和(2.3)即可证明(2.1)成立. 证毕.

现在, 令 $W_b(t)$ 是满足 $W_b(t)=1-bC|t|^\alpha+o(|t|^\alpha)\ (t\to 0)$ 的相关函数, 其中 $b>1$ 是给定的常数, 则必存在 $t_0>0$, 使得对充分大的 T 有 $R(t)\geq W_b(t)+(1-W_b(t))\rho(t)$, $0\leq t\leq t_0$.

固定 $h>0$, 并将区间 $(0,\infty)$ 分成长度分别为 $h-\sigma$ 和 σ 的区间 $I_1, I_1^*, I_2, I_2^*, \cdots$, 其中 $0<\sigma\leq\min\{t_0,h\}$. 设 $\{\eta_l(t), t\geq 0\}$, $l=1,2$ 是二样本函数连续, 均值为 0 方差为 1 且分别具有相关函数 $R_1(t)=W_b(t)I(|t|\leq\sigma)$ 和 $R_2(t)=R(t)I(|t|\leq\sigma)$ 的平稳正态过程, 其中 $I(|t|\leq\sigma)$ 是集合 $\{t:|t|\leq\sigma\}$ 的示性函数. 令 $X_l(t)=(1-\rho(T))^{1/2}\eta_l(t)+\rho^{1/2}(T)U$, $l=1,2$, U 表示独立于随机过程 $\{\eta_l(t), t\geq 0\}$, $l=1,2$ 的标准正态 r.v.. 记 $u_T=x/a_T+b_T$, $u_T'=(x+\gamma-\sqrt{2\gamma}z)/a_T+b_T+o(a_T^{-1})$, $x, z\in R^1$.

引理 2.2　设 $\{\xi(t), t\geq 0\}$ 是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程,其相关函数 $R(t)$ 满

足条件(1.1)和(1.3). 令 $0 < c = c_1 < d_1 \le c_2 < d_2 \le \cdots \le c_s < d_s = d$, $E_i = (Tc_i, Td_i)$, $M(E_i) = \sup\{\xi(t), t \in E_i\}$, $M_l(E_i) = \sup\{\eta_l(t), t \in E_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $l = 1, 2$. 取 $q = q_T \to 0$ 是满足当 $T \to \infty$ 时, $q(2\log T)^{1/\alpha} \to a > 0$ 的变量,则当 $T \to \infty$ 时,

(1) $$0 \le P(\bigcap_{i=1}^{s}\{\xi(kq) \le u_T, kq \le \bigcup_j I_j \cap E_i\}) - P(\bigcap_{i=1}^{s}\{M(E_i) \le u_T\}) \le e^{-x}(d-c)(\rho_a + \sigma/h) + o(1); \tag{2.4}$$

(2) $$P(\bigcap_{i=1}^{s}\{X_1(kq) \le u_T, kq \in \bigcup_j I_j \cap E_i\}) + o(1) \le P(\bigcap_{i=1}^{s}\{\xi(kq) \le u_T, kq \in \bigcup_j I_j \cap E_i\}) \le P(\bigcap_{i=1}^{s}\{X_2(kq) \le u_T, kq \in \bigcup_j I_j \cap E_i\}) + o(1); \tag{2.5}$$

(3) $$\left| P(\bigcap_{i=1}^{s}\{\eta_2(kq) \le u'_T, kq \in \bigcup_j I_j \cap E_i\}) - \prod_{i=1}^{s} P(M_2(E_i) \le u'_T) \right| \le s e^{-x-\gamma+\sqrt{2}\gamma z}(d-c)(\rho_a + \sigma/h) + o(1); \tag{2.6}$$

(4) $$P(\bigcap_{i=1}^{s}\{\eta_1(kq) \le u'_T, kq \in \bigcup_j I_j \cap E_i\}) \ge \prod_{i=1}^{s} P(M_1(E_i) \le u'_T) + o(1), \tag{2.7}$$

这里 $\rho_a = 1 - H_\alpha(a)/H_\alpha \to 0\ (a \to 0)$.

本引理证明从略.

在证明本节的主要结果之前,先给出 cox 过程的概念.

定义 2.3 设 N 是一个随机点过程,如果 N 的分布如下确定:对于两两不变的 Borel 集 $B_1, B_2, \cdots, B_s$,有

$$P(\bigcap_{i=1}^{s}\{N(B_i) = k_i\}) = (\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\{[m(B_i)\exp(-x-\gamma+\sqrt{2}\gamma z)]^{k_i}/k_i!) \times \exp(-m(B_i)e^{-x-\gamma+\sqrt{2}\gamma z})\}\phi(z)\,dz \tag{2.8}$$

($m(B)$表示集合 B 的 Lebesgue 测度, $\phi(\cdot)$是标准正态 r.v. 的概率密度),则称 N 是具有(随机)强度 $\exp\{-x-\gamma+\sqrt{2}\gamma\xi\}$的 cox 过程,其中 ξ 是一个标准正态 r.v.

令 $N_{\varepsilon, u_T}(B) = \#\{\xi(t)\ \varepsilon$- 上穿水平 $u_T, t \in B\}$, $N_T(B) = N_{\varepsilon, u_T}(T \cdot B)$ (B 是 Borel 集),则 N_{ε, u_T}和 N_T 是二随机点过程.

定理 2.4 设$\{\xi(t), t \ge 0\}$是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程,其相关函数 $R(t)$满足(1.1)和(1.3),则 N_T 在$(0, \infty)$上弱收敛于由(2.8)定义的 cox 过程 N.

证明 由点过程基本收敛定理,只需证明当 $T \to \infty$ 时,有

(i) $E[N_T((c, d])] \to E[N((c, d])] = e^{-x}(d-c)$对所有的 $0 < c < d$ 成立;

(ii) $$P(N_T(B) = 0) \to P(N(B) = 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\exp\{-(d_i - c_i)e^{-x-\gamma+\sqrt{2}\gamma z}\}\phi(z)\,dz$$

对所有形如 $\bigcup_{i=1}^{s}(c_i, d_i]$, $0 < c_1 < d_1 < \cdots < c_s < d_s$ 的 B 成立.

由文[1]中引理 12.4.1 知, $E[N_T((c, d])] = E[N_{\varepsilon, u_T}((Tc, Td])] = TE[N_{\varepsilon, u_T}((c, d])] \to (d-c)e^{-x}$, (i)得证.

下面证明(ii). 因为

$$0 \le P(N_T(B) = 0) - P(\bigcap_{i=1}^{s}\{M(E_i) \le u_T\}) \le \sum_{i=1}^{s} P(M((Tc_i, Tc_i + \varepsilon]) > u_T) \to 0\ (T \to \infty),$$

因此,为证明(ii)只需证明,当 $T\to\infty$ 时,有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{s}\{M(E_i)\le u_T\}\right)\to\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\exp\{-(d_i-c_i)e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\}\phi(z)\,dz. \qquad (2.9)$$

利用引理 2.2 和文[1]中定理 12.4.2 可证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\exp\{-(d_i-c_i)b^{1/\alpha}e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\}\phi(z)\,dz-e^{-x}(d_s-c_1)(\rho_a+\sigma/h)$$

$$\le\liminf_{T\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{s}\{M(E_i)\le u_T\}\right)\le\limsup_{T\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{s}\{M(E_i)\le u_T\}\right)$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\exp\{-(d_i-c_i)e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\}\phi(z)\,dz+$$

$$s(d_s-c_1)(\rho_a+\sigma/h)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\phi(z)\,dz.$$

令 $\sigma\to0$, $a\to0$ 和 $b\to1$,则(2.9)成立,从而定理 2.4 得证.

利用定理 2.4,可以直接得到强相关不可微平稳 Gauss 过程最大值的极限分布.

定理 2.5 设$\{\xi(t), t\ge0\}$是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程,其相关函数 $R(t)$满足(1.1)和(1.3),则$\lim\limits_{T\to\infty}P(a_T(M(T)-b_T)\le x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\}\phi(z)\,dz$.

3 关于几个高水平的 ε-上穿问题

设 $x_1>x_2>\cdots>x_s$ 是 s 个定数, $u_{T_i}=x_i/a_T+b_T$, $i=1,2,\cdots,s$ 是 s 个水平. 由定理 2.4 知,如果(1.1)和(1.3)成立,则平稳 Gauss 过程 $\xi(t)$对于水平 $u_{T_1}>u_{T_2}>\cdots>u_{T_s}$的每个时间标准化的ε-上穿点过程都渐近于 cox 过程. 本节中考虑 Gauss 过程上穿多个水平形成的平面上的点过程的弱收敛问题. 为此令 $\xi_T(t)=a_T(\xi(tT)-b_T)$,则 $\xi_T(t)=x$ 当且仅当 $\xi(tT)=x/a_T+b_T$. 以 $L_1, L_2,\cdots,L_s$ 表示 tox 平面中 s 条水平直线 $x=x_1,\cdots,x=x_s$,并考虑由 $\xi_T(t)$对这些直线的 ε-上穿所形成的平面上的点过程. 令 $N_T^{(i)}$ 表示 $\xi_T(t)$对水平 x_i 的ε-上穿点过程, $i=1,2,\cdots,s$,且令 $N_T^*(B)=\#\{\xi_T(t)$在 B 中上穿 $L_1,L_2,\cdots,L_s\}$,则 $N^*(B)=\sum\limits_{i=1}^{s}N_T^{(i)}(B\cap L_i)$,其中 $B\subset R^2$ 是 Borel 集. 因此, N_T^* 是 $\xi_T(t)$对 s 个水平 $x_1>x_2>\cdots>x_s$ 的ε-上穿所形成的平面上的点过程. 将证明 N_T^* 弱收敛于一个半平面$(0,\infty)\times R^1$ 上的点过程 N^*, $N^*(B)=\sum\limits_{i=1}^{s}N^{(i)}(B\cap L_i)$, $B\subset(0,\infty)\times R^1$ 是 Borel 集, $N^{(s)}$是直线 L_s 上的具有强度 $\exp(-x_s-\gamma+\sqrt{2\gamma}\xi)$的 cox 过程,而 $N^{(i)}$是由 $N^{(i+1)}$通过具有删除概率为 $1-e^{-x_i}/e^{-x_{i+1}}$的二项稀疏得到的点过程,易知 $N^{(i)}$仍为 cox 过程, $i=1,2,\cdots,s-1$.

定理 3.1 设$\{\xi(t), t\ge0\}$是均值为 0 方差为 1 的平稳 *Gauss* 过程,其相关函数 $R(t)$满足(1.1)和(1.3). 令 $0<c=c_1<d_1\le c_2<d_2\le\cdots\le c_s<d_s=d$, $E_i=(Tc_i, Td_i]$, $i=1,2,\cdots,s$,则当 $T\to\infty$时

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{s}\{M(E_i)\le u_{T_i}\}\right)\to\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{s}\exp\{-(d_i-c_i)e^{-x_i-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\}\phi(z)\,dz. \qquad (3.1)$$

证明 方法与定理 2.4 类似,略.

为得到本节的主要结果,还需证明如下引理.

引理 3.2 令 $x_i > x_j$, $N_T^{(i)}$ 和 $N_T^{(j)}$ 分别是 $\xi_T(t) = a_T(\xi(tT) - b_T)$ 对水平 x_i 和 x_j 的 ε 上穿点过程. 如果 $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程且其相关函数满足条件 (1.1) 和 (1.3), 则当 $T \to \infty$ 时,

$$P(N_T^{(i)}(I) > N_T^{(j)}(I)) \to 0 \tag{3.2}$$

对任何有界区间 I 成立.

证明 定义 $t_1 = \inf\{t : \xi(t) > u_{T_j}, t \in T \cdot I\}$, $t_k = \inf\{t : \xi(t) > u_{T_j}, t \geq t_{k-1} + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $k = 2, 3, 4, \cdots$; 并令 $A_T(I) = \max\{k : k = 0$ 或 $t_k \in T \cdot I\}$. 因为 $A_T(I) \geq N_T^{(i)}(I)$, 所以为证明 (3.2), 只需证明当 $T \to \infty$ 时,

$$P(A_T(I) > N_T^{(j)}(I)) \to 0. \tag{3.3}$$

为证 (3.3), 定义 $N_{T,n}^{(j)}(I) = \#\{\xi(t)$ 对水平 u_{Tj} 的 ε/n-上穿, $t \in T \cdot I\}$, $n = 1, 2, \cdots$, 特别地 $N_T^{(j)}(I) = N_{T,1}^{(j)}(I)$. 不失一般性, 可以取 $I = [0, 1]$, 则

$$P(A_T(I) > N_T^{(j)}(I)) \leq P(N_{T,n}^{(j)}(I) > N_T^{(j)}(I)) + P(A_T(I) > N_{T,n}^{(j)}(I)).$$

由定理 2.4 知, $P(N_{T,n}^{(j)}(I) > N_T^{(j)}(I)) \leq E[N_{T,n}^{(j)}(I) - N_T^{(j)}(I)] \to 0\ (T \to \infty)$, 而由文 [1] 中定理 12.2.9 有

$$\begin{aligned} P(A_T(I) > N_{T,n}^{(j)}(I)) &\leq P\Big(\bigcup_{k=0}^{[T/\varepsilon+1]}\{M([k\varepsilon, (k+\frac{1}{n})\varepsilon]) > u_{Tj}\}\Big) \\ &\leq (T/\varepsilon + 2)\, P(M((0, \varepsilon/n]) > u_{Tj}) \to e^{-x_j}/n\ (T \to \infty). \end{aligned}$$

因为 n 是任意的, 故引理 3.2 得证.

定理 3.3 设 $\{\xi(t), t \geq 0\}$ 是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程, 其相关函数 $R(t)$ 满足 (1.1) 和 (1.3), 则点过程 N_T^* 在 $(0, \infty) \times R^1$ 上弱收敛于点过程 N^*, 其中 $N^*(B) = \sum_{i=1}^{s} N^{(i)}(B \cap L_i)$, B 是 $(0, \infty) \times R^1$ 中 Borel 集, $N^{(s)}$ 是直线 L_s 上具有 (随机) 强度 $\exp\{-x_s - \gamma + \sqrt{2\gamma}\xi\}$ 的 cox 过程 (ξ 是一标准正态 r.v.), 而 $N^{(i)}$ 是由 $N^{(i+1)}$ 通过具有删除概率为 $1 - e^{-x_i}/e^{-x_{i+1}}$ 的二项稀疏得到的 cox 过程, $i = 1, 2, \cdots, s-1$.

证明 利用点过程基本收敛定理, 只需证明当 $T \to \infty$ 时,

(i) $E[N_T^*(B)] \to E[N^*(B)]$ 对所有形如 $(c, d] \times (\beta, \delta]$, $0 < c < d$, $\beta < \delta$ 的集合 B 成立;

(ii) $P(N_T^*(B) = 0) \to P(N^*(B) = 0)$ 对所有形如 $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ 的集合 B 成立, 其中 B_k 是形如 (i) 中的矩形, 且两两不交.

结果 (i) 容易得到, 只证 (ii). B 可写成如下形式 $B = \bigcup_{k=1}^{m} D_k = \bigcup_{k=1}^{m}((c_k, d_k] \times \bigcup_{j=1}^{j_k}(\beta_{k_j}, \delta_{k_j}])$, 其中 $(c_k, d_k] \cap (c_l, d_l] = \varnothing$ 对 $k \neq l$. 对每个 k, 令 $m_k = \max\{j : L_j \cap D_k \neq \varnothing, j = 1, 2, \cdots, s\}$, 因此, $L_{m_k} \cap D_k \neq \varnothing$, 但对于 $j > m_k$, $L_j \cap D_k = \varnothing$.

显然, $\{N_T^{(m_k)}((c_k, d_k]) = 0\} \subset \{N_T^*(D_k) = 0\} \cup \big(\bigcup_{i_k=1}^{m_k-1}\{N_T^{(i_k)}((c_k, d_k]) > 0\}\big)$ 且 $\{N_T^*(D_k) = 0\} \subset \{N_T^{(m_k)}((c_k, d_k]) = 0\}$, 因此, 有下面不等式

$$0 \leq P\Big(\bigcap_{k=1}^{m}\{N_T^{(m_k)}((c_k, d_k]) = 0\}\Big) - P(N_T^*(B) = 0)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{m_k-1} P(N_T^{(i_k)}((c_k, d_k]) > N_T^{(m_k)}((c_k, d_k])),$$

因为 $i_k < m_k$,故由引理 3.2 知 $P(N_T^{(i_k)}((c_k, d_k]) > N_T^{(m_k)}((c_k, d_k])) \to 0\ (T \to \infty)$. 从而有

$$P(\bigcap_{k=1}^{m}\{N_T^{(m_k)}((c_k, d_k]) = 0\}) - P(N_T^{*}(B) = 0) \to 0\ (T \to \infty).$$

但是$\{N_T^{(m_k)}((c_k, d_k]) = 0\} - \{M((Tc_k, Td_k]) \leq u_{T_k}\} \subseteq \{M((Tc_k, Tc_k + \varepsilon]) > u_{T_k}\}$,故由定理 3.1 知$\lim\limits_{T\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^{m}\{N_T^{(m_k)}((c_k, d_k]) = 0\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{m} \exp\{-(d_k - c_k) e^{-x_{m_k} - \gamma + \sqrt{2\gamma} z}\} \phi(z)\, dz$. □

用 $M^{(i)}(T)$表示$\{\xi(t), t \geq 0\}$在$[0, T]$中的第 i 个局部ε最大值, $i = 1, 2, \cdots$,则利用定理 3.3 可得如下结果.

定理 3.4 设$\{\xi(t), t \geq 0\}$是均值为 0 方差为 1 的平稳 Gauss 过程,其相关函数 $R(t)$满足(1.1)和(1.3),则对 $x_1 > x_2$ 有

$$\lim_{T\to\infty} P(a_T(M^{(1)}(T) - b_T) \leq x_1, a_T(M^{(2)}(T) - b_T) \leq x_2)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma} z} - e^{-x_1 - \gamma + \sqrt{2\gamma} z} + 1) \exp\{-e^{-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma} z}\} \phi(z)\, dz.$$

参 考 文 献

[1] M. R. Leadbetter, G. Lindgren and H. Rootzén, Extremes and related properties of random sequence and processes, Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] Y. Mittal and D. Ylvisaker, *Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes*, Stochastic Process, Appl., 3(1975), 1 - 18.

[3] G. Lindgren, J. de. Maré and H. Rootzén, *Weak convergence of high level crossings and maxima for one or more Gaussion processes*, Ann. Probab., 3(1975), 961 - 978.

Weak Convergence of High Level Crossings and Maxima for Stationary Gaussian Processes with Strong Dependence

Wang Xiaoming

(Dalian Naval Academy, Dalian 116013)

Wang Xuebiao

(Northeast University of Finance and Economics, Dalian 116010)

Abstract

Let $\{\xi(t), t \geq 0\}$ be a stationary Gaussian process with covariance function $R(t)$ satisfying $R(t)\log t \to \gamma > 0$ as $t \to \infty$ and $R(t) = 1 - c|t|^{\alpha} + o(|t|^{\alpha})$ as $t \to 0$ where $0 < \alpha \leq 2$ and $c > 0$. In this paper, we establish the limit theorems of the point process of ε-upcrossings of one or more high levels by $\{\xi(t), t \geq 0\}$, and we obtain the limiting distributions of maxima and the joint asymptotic distributions of several local ε-maximas.

Keywords strong dependence, high level crossings, cox processes.