第 18 卷第 3 期　数学研究与评论　Vol. 18 No. 3
1998 年 8 月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1998

集合上的递归函数*

周　青
(中山大学软件研究所, 广州 510275)

摘　要　本文在 Jensen 和 Karp 工作的基础上引进了集合上的递归函数的概念. 研究了递归集函数的初步性质, 讨论了递归集函数与 Jensen 和 Karp 定义的原始递归集函数及递归数论函数之间的关系, 并给出了 ZFC 的可定义集模型上递归集函数的范式定理.

关键词　递归集函数, 递归集论公式, 原始递归集函数.
分类号　AMS(1991) 03D20, 03E45/ CCL O141.3

本文讨论集合上的递归函数, 即试图把递归函数的概念推广到集合上, 并研究它们的性质.

集论中的 Δ_0 公式是 ZFC 中的这样一类公式: 它们的所有量词都是受囿量词, 即它们都具有 $\forall x(x\in y\to\cdots)$ 或 $\exists x(x\in y\ \&\ \cdots)$ (简记为 $\forall x\in y(\cdots)$ 和 $\exists x\in y(\cdots)$) 的形式. 这类公式的明显特征在于刻画了集合的内部性质, 从而使我们能够借助某些已知集合来描述其它集合. 同时, 这类公式的表达能力也很强. Levy[5] 和 Gaifman[1] 等人对这类公式进行了细致的研究, 详尽地讨论了它们的逻辑复杂性. 本文将用 Δ_0 公式来定义集合上的递归函数, 从而使集论的公式复杂性分层和函数复杂性分层相一致.

一

定义 1.1　只有用下述模式 i) 和 ii) 定义的集函数 f 是递归集函数:

i)　如果存在 Δ_0 公式 A 使 $f(x_1,\cdots,x_n)=y\leftrightarrow A(y,x_1,\cdots,x_n)$, 则 f 是递归集函数;

ii)　如果存在递归集函数 $g,h_1,\cdots,h_k$ 使 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(h_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,h_k(x_1,\cdots,x_n))$, 则 f 是递归集函数.

定义 1.2　只有用下述模式 i) 和 ii) 定义的公式 A 是递归公式:

i)　Δ_0 公式是递归公式;

ii)　如果 B 是递归公式, $f_1,\cdots,f_k$ 是递归集函数, 且 $A(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow B(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_k(x_1,\cdots,x_n))$, 则 A 是递归公式.

为了书写方便, 在不会引起混淆的情况下将用单个粗写字母来表示 n-元组, 即用 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 来表示 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$, 用 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ 表示 $f_1,\cdots,f_k$ 和 $g_1,\cdots,g_k$ 等.

* 1995 年 10 月 18 日收到. 1997 年 9 月 24 日收到修改稿.

根据以上定义不难证明下述集论函数都是递归集函数

1. $P_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i (i = 1, \cdots, n)$;

2. $\cup x$ (x 中元素的并集);

3. $\mathrm{Do}(x)$ (x 的定义域);

4. $\mathrm{Rg}(x)$ (x 的值域).

下面的命题是关于递归集函数和递归公式的简单结果,它们的证明就不列出了.

命题 1.3　对于任何递归集函数 f,存在 Δ_0 公式 A 和递归集函数 $\mathbf{g}$,使 $f(\mathbf{x}) = y \leftrightarrow A(y, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$.

命题 1.4　递归集函数的图形是递归公式.

命题 1.5　公式 A 是递归的当且仅当存在 Δ_0 公式 B 和递归集函数 $\mathbf{g}$ 使得

$$A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

由于可以很容易地证明递归公式对命题演算是封闭的,由命题 1.4,对于任意递归集函数 f, G_f 是递归公式(在本文中, G_f 表示函数 f 的图形,即 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Do}(f)\}$.).这样,当我们要证明一切递归公式具有某一性质 P 时可以使用下述递归方法:

1) 所有 Δ_0 公式具有性质 P;

2) 如果 A 和 $G_{\mathbf{f}}$ 具有性质 P(其中 $G_{\mathbf{f}}$ 表示 $G_{f_1} \& \cdots \& G_{f_k}$),则 $B(\mathbf{x}) \leftrightarrow A(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ 具有性质 P.

为了证明这种证明方法是合理的,定义 ZFC 公式集 S_ω 如下

$$S_0 = \Delta_0,$$

$$S_{n+1} = S_n \cup \{A(\mathbf{x}) : \text{存在 } B, G_{\mathbf{f}} \in S_n \text{ 使 } A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\},$$

$$S_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

对于如此定义的 S_n,使用归纳法容易证明:

引理 1.6　如果 $A, B \in S_n$,则 $A \& B \in S_n$.

引理 1.7　任何递归公式都属于 S_ω.

证明　施归纳于递归集函数证明任何递归集函数的图形都属于 S_ω.

设 f 为递归集函数,若 G_f 是 Δ_0 公式,则 $G_f \in S_0 \subset S_\omega$.若存在递归集函数 g, $\mathbf{h}$ 使

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{h}(\mathbf{x})),$$

根据归纳假设,有 $G_g, G_{\mathbf{h}} \in S_\omega$.由 S_ω 的定义,存在 m,使 $G_g, G_{\mathbf{h}} \in S_m$.对 $i = 1, \cdots, k$,令 $h_i'(y, \mathbf{x}) = h_i(P_2^{n+1}(y, \mathbf{x}), \cdots, P_{n+1}^{n+1}(y, \mathbf{x}))$, $h_0'(y, \mathbf{x}) = p_1^{n+1}(y, \mathbf{x})$.因为 P_i^{n+1} 的图形是 Δ_0 公式,由定义及引理 1.6, $G_{\mathbf{h}'} \in S_{m+1} \subset S_\omega$,其中 $\mathbf{h}' = (h_0', \cdots, h_k')$.同时,由于 $G_f(y, \mathbf{x}) \leftrightarrow G_g(\mathbf{h}'(y, \mathbf{x}))$,由定义, $G_f \in S_{m+2} \subset S_\omega$.由归纳法原则,任何递归函数的图形都属于 S_ω.

现在,施归纳于递归公式证明引理.设 A 是递归公式,若 A 是 Δ_0 公式,则 $A \in S_0$.否则存在递归公式 B 和递归函数 $\mathbf{f}$,使 $A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$.由归纳假设,存在正整数 m 使 $B \in S_m$;由以上结论及引理 1.6,存在 m 使得 $G_{\mathbf{f}} \in S_m$.现在,令 $p = \max\{m, m'\}$.于是 $B, G_{\mathbf{f}} \in S_p$.再由定义可得: $A \in S_{p+1} \subset S_\omega$.证毕.

定理 1.8　如果所有的 Δ_0 公式有性质 P,而且当 B, G_f 有性质 P, $A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ 有性质 P,则所有的递归公式有性质 P.

证明　假定存在递归公式 A 没有性质 P. 由以上引理, $A \in S_\omega$. 根据定理条件, 有 $A \notin S_0$. 设 m 是使 S_n 中含有如此递归公式 A 的最小的自然数 n, 所以 $m > 0$. 因为 $A \in S_m$, 由 S_ω 的定义存在 B, $G_{\mathbf{f}} \in S_{m-1}$, 使得 $A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. 由 m 的最小性, B 和 $G_{\mathbf{f}}$ 都有性质 P. 由定理条件, A 有性质 P. 矛盾.

称这种证明方法为"施归纳于递归公式的层次". 应用这种方法可以容易地证明:

命题 1.9　递归公式对受囿量词是封闭的.

现在, 对于 ZFC 中的公式 A, 定义

$$C_{A,x} = \{x : A(x, \mathbf{x}) \,\&\, \forall u \in x \rightarrow A(u, \mathbf{x})\}.$$

若 $x \in C_{A,x}$, 则称 x 是 A 对 $\mathbf{x}$ 的 $\in$-极小元; 若 A 对 $\mathbf{x}$ 的 $\in$-极小元只有一个, 则称 A 对 $\mathbf{x}$ 的正规的; 若 A 对一切 $\mathbf{x}$ 是正规的, 则称 A 是正规的. 然后对任意的 ZFC 公式定义 min-算子如下:

$$\min_G xA(x, \mathbf{x}) = \begin{cases} y, & y \text{ 是 } A \text{ 对 } \mathbf{x} \text{ 的唯一 } \in\text{-极小元}, \\ 0, & y \text{ 不是 } A \text{ 对 } \mathbf{x} \text{ 的唯一 } \in\text{-极小元}. \end{cases}$$

二

本节将在上节内容的基础上对递归集函数作进一步的讨论.

定理 2.1 原始递归集函数是递归集函数.

证明 由于原始递归集函数的初始函数的图形是 Δ_0 公式,所以由定义即知它们是递归的. 同时,很容易证明递归集函数对 Karp 和 Jensen 所定义的复合算子是封闭的. 因此仅需证明下述定义的 f 是递归集函数即可

$$f(z,\mathbf{x}) = g(\bigcup\{f(u,\mathbf{x}) : u \in z\}, z, \mathbf{x}),$$

其中, g 是递归集函数. 因为 $f(z,\mathbf{x}) = g(\bigcup Rg(f \upharpoonright z), z, \mathbf{x})$, 由 g, $\bigcup$, Rg 的递归性即得定理.

定理 2.2 递归数论函数是递归集函数.

证明 施归纳于递归数论函数. 证完.

现在给出如下定义:

定义 2.3 设 f 是任意的递归集函数. 若当 $\mathbf{x} \in \omega$ 时, $f(\mathbf{x}) \in \omega$, 且 $G_f(y,\mathbf{x})$ 的前束范式中的量词都受囿于 ω 或者某一自然数,全称量词都受囿于某一自然数,所有的常项都属于 ω, 则称 f 是算术的.

定理 2.4 如果 f 是算术的,则 $f \upharpoonright \omega$ 是递归数论函数.

以上结果足以看出把 1.1 中所定义的函数类称为递归集函数是有根据的.

为了讨论递归集函数的范式定理,定义:

定义 2.5 设 x 是集合. 如果存在 ZFC 公式 A 使 $x = \{u : \vdash A(u)\}$, 则称 x 是 ZFC 中的可定义集合. 由一切 ZFC 中可定义集合组成的模型称为 ZFC 的可定义模型,记为 $\mathfrak{D}$

引理 2.6 一个集合 x 是可定义的当且仅当存在一个 ZFC 公式 A, 使 $x = \min uA(u)$.

证明 设 x 是可定义集. 由定义,存在 ZFC 公式 B, 使 $x = \{v : B(v)\}$. 令

$$A(u) \leftrightarrow \forall y(B(y) \leftrightarrow y \in u).$$

因为 x 是集合,显然有 $x = \min uA(u)$.

如果存在 ZFC 公式 A 使 $x = \min uA(u)$, 则 $x \in \{u : A(u)\}$, 所以 x 是集合. 现在,如果 $\min uA(u) = 0$, 有 $x = \{u : u \neq u\}$, 从而 x 是可定义的. 如果 $\min uA(u) \neq 0$, 则 $x = \{y : \exists u(A(u) \& \forall v \in u \to A(v) \& y \in u)\}$. 于是 x 也是可定义的. 所以,无论何种情况, x 都是可定义集. □

现在,着手证明 $\mathfrak{D}$ 上递归函数的范式定理.

首先,把 ZFC 中的每一个符号对应一个特定的序数(称为它的表示序数), 并且 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示 α,β 的序数配对函数. 然后定义:

$$\langle\alpha\rangle = \langle\alpha,0\rangle,\quad \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle = \langle\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\rangle,\alpha_n\rangle,$$

$$(\alpha)_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{若 } \alpha = \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle \text{ 且 } 1 \le i \le n, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

"°".特别地,ZFC 中的公理和推理规则都有它们的表示序数.这样,就可以定义一个公式的证明的表示序数了.把它记为 $\mathrm{Pr}(\alpha,\beta)$,其中 α 是所证公式的表示序数,β 是该公式的一个证明的表示序数.同时,用递归函数

$$\mathrm{Sb}_n(\text{“}A\text{”},\text{“}a_1\text{”},\cdots,\text{“}a_n\text{”})=\text{“}A[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n]\text{”}$$

来表示用项 $a_1,\cdots,a_n$ 代入公式 A 中变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的表示序数.由于假定 ZFC 中的变元是按字母顺序排列的,这种代入不会引起混乱.

对于任何 $x\in\mathfrak{D}$ 存在 ZFC 公式 B 使 $x=\{u:B(u)\}$.选择其表示序数最小的作为 x 的定义公式,设为 A.现在定义:

$$\mathrm{RF}(x)=\text{“}\min u(\forall y(y\in u\leftrightarrow A(y)))\text{”}.$$

根据以上的讨论,RF 对一切 $x\in\mathfrak{D}$ 都有定义.同时,由序数配对函数的递归性及可逆性,可以立即得到:

引理 2.7 存在可逆的递归函数 RF,使得对于任何 $x\in\mathfrak{D}$ 存在序数 α,使 $\mathrm{RF}(x)=\alpha$.

引理 2.8 对于任何公式 A,有 $\vdash_{\mathrm{ZFC}}A\leftrightarrow\exists\rho\mathrm{Pr}(\text{“}A\text{”},\rho)$.

证明 如果 $\vdash_{\mathrm{ZFC}}A$,则 ZFC 中存在 A 的证明公式序列 $B_1,\cdots,B_n$.令 $\rho=\langle\text{“}B_1\text{”},\cdots,\text{“}B_n\text{”}\rangle$,则 $\vdash_{\mathrm{ZFC}}\mathrm{Pr}(\text{“}A\text{”},\rho)$.于是,$\vdash_{\mathrm{ZFC}}\exists\rho\mathrm{Pr}(\text{“}A\text{”},\rho)$.

反过来,如果 $\vdash_{\mathrm{ZFC}}\exists\rho\mathrm{Pr}(\text{“}A\text{”},\rho)$,则 A 有一个 ZFC 中的证明,所以 $\vdash_{\mathrm{ZFC}}A$. □

引理 2.9 设 f 是函数,R 是公式.如果 $R((z)_1,(z)_2,\mathbf{x})$ 是正规的,则

$$\forall y(G_f(y,\mathbf{x})\leftrightarrow\exists xR(y,x,\mathbf{x}))\rightarrow f(\mathbf{x})=(\min zR((z)_1,(z)_2,\mathbf{x}))_1.$$

证明 假定 $u=\min zR((z)_1,(z)_2,\mathbf{x})$.有 $\vdash_z\vdash\exists xR((u)_1,x,\mathbf{x})$.由前提,$G_f((u)_1,\mathbf{x})$.再由图形的定义即得:$(u)_1=f(\mathbf{x})$.于是,引理得证.

现在就来证明范式定理.

定理 2.10(范式定理) 存在 $n+2$ 元递归公式 T_n 使得对于任何 n 元集函数 f,f 是递归的当且仅当存在序数 e(称为 f 的指标)和不依赖 f 的递归函数 U,使

$$f(\mathbf{x})=U(\min\rho T_n(e,\rho,\mathbf{x})).$$

证明 令

$$U(z)=RF^{-1}((z)_1),$$

$$T_n(e,\rho,\mathbf{x})\leftrightarrow\mathrm{Pr}(\mathrm{Sb}_{n+1}(e,(\rho)_1,\text{“}x_1\text{”},\cdots,\text{“}x_n\text{”}),(\rho)_2).$$

容易证明 U 是递归集函数,而且,由 T_n 的构造,T_n 是递归公式.

现在,设 f 是 n 元递归函数,G_f 是 f 的图形.则 G_f 是递归的.令 $e=\text{“}G_f\text{”}$.根据 2.8,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x})=y\leftrightarrow G_f(y,\mathbf{x})&\leftrightarrow\exists\alpha\mathrm{Pr}(\mathrm{Sb}_{n+1}(e,\text{“}y\text{”},\text{“}x_1\text{”},\cdots,\text{“}x_n\text{”}),\alpha)\\&\leftrightarrow\exists\rho\mathrm{Pr}(\mathrm{Sb}_{n+1}(e,(\rho)_1,\text{“}x_1\text{”},\cdots,\text{“}x_n\text{”}),(\rho)_2)\\&\leftrightarrow\exists\rho T_n(e,p,\mathbf{x}).\end{aligned}$$

因为序数是良序的,所以 $T_n(e,\rho,\mathbf{x}_1)$ 是正规的.于是,根据 2.9,

$$f(\mathbf{x})=U(\min\rho T_n(e,\rho,\mathbf{x})).$$

反过来,如果存在序数 e 使

$$f(\mathbf{x})=U(\min\rho T_n(e,p,\mathbf{x})),$$

由 1.10,$\min\rho T_n(e,\rho,\mathbf{x})$ 是递归函数,再由 U 的递归性可知 f 是递归的.

于是定理得证.

参 考 文 献

[1] H. Gaifman, *Finiteness in not a Σ_0 property*, Israel of Math., 19(1974), 359 - 368.

[2] K. Godel, *The consistency of axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proc. Natl. Acad. USA 24, 556 - 557, 1938.

[3] R. B. Jenson and C. Karp, *Primitive recursive set functions*, In Axiomatic Set Theory: Proc. Symp. Pure Math. 13, Amer. Math. Soc., 143 - 176, 1971.

[4] C. Karo, *A proof of the relative consistency of the continuum hypothesis*, in "Sets, Models, and Recursion Theory" (ed. J. Crossley), North Holland, 1 - 32, 1967.

[5] A. Levy, *On the logical complexity of several sxioms of set theory*, Axiomatic Set Theory: Proc. Symp. Pure Math. 13, Amer. Math. Soc., 219 - 230, 1971.

[6] J. Myhill and D. Scott, *Ordinal definability, in "Axiomatic Set Theory"*, Proc. Symp. Pure Math., 13, Amer. Math. Soc., 271 - 278, 1971.

[7] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Massachusetts, Menlo Park, California, London, 1967.

Recursive Set Functions

Zhou Qing

(Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract

In this paper, the notions of recursive functions and recursive formulas on sets are introduced; some properties of such functions and formulas are studied; and the relations between recursive set functions and primitively recursive set functions are defined by Jenson and Karp and between recursive set functions and recursive number theoretic functions are also discussed. The paper concludes with the Normal Form Theorem for recursive set functions.

Keywords recursive set functions, recursive formulas on sets, primitively recursive set functions.