第18卷第3期 数学研究与评论 Vol.18 No.3
1998年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.1998

一类特殊的Fuzzy局部凸空间*

金 聪
(湖北大学计算机科学系,武汉430062)

摘 要 文中给出了Fuzzy有界型空间的定义,在此基础上,讨论了Fuzzy有界型空间的等价定理,最后证明了Q-C_I Fuzzy局部凸空间是有界型的.

关键词 Fuzzy局部凸空间,Fuzzy半范,Fuzzy有界型空间.
分类号 AMS(1991) 54A40/CCL O189.1

本文中$\mathbf{F}(X)$表示X上Fuzzy集全体,其中X表示非空普通集,X表示X上Fuzzy点的全体. $u^*(u\in[0,1])$表示X上隶属函数取常值u的Fuzzy集. I_0表示左开右闭区间$(0,1]$, x_λ表示X上以x为承点,λ为高的Fuzzy点,x_λ重于A记为$x_\lambda\in A$.

有关有界Fuzzy集、绝对凸集、平衡集、Q吸收集等概念请参照[1].文中X到Y的Fuzzy线性算子,均在[2]意义下进行.

定义1 设$(X,\mathcal{T})$是Fuzzy局部凸空间[1], $A\in\mathbf{F}(X)$是有界Fuzzy集, p是X上的Fuzzy半范.如果对任意$\alpha\in(0,1]$,存在$0<\delta<\alpha$使得$\{p(x_\lambda):x_\lambda\in A\cap(1-\alpha+\delta)^*\}$均为有界集,则称$p$在有界Fuzzy集$A$上有界.

定义2 $(X,\mathcal{T})$是Fuzzy局部凸空间, p是X上的Fuzzy半范.如果p在任意有界Fuzzy集上有界,必有p在X上Fuzzy连续[3],则称$(X,\mathcal{T})$是Fuzzy有界型空间.

定义3 $(X,\mathcal{T})$是Fuzzy拓扑向量空间, A、$B\in\mathbf{F}(X)$.如果对于$\lambda\in I_0$,有$\alpha>0$及$0<\varepsilon<\lambda$使$B\cap(1-\lambda+\varepsilon)^*\subset\alpha A$,则称$A$为$\lambda$-吸收$B$.

若对任意$\lambda\in I_0$, A恒λ-吸收B,则称A吸收B.

引理1 设T_ϕ是X到Y的Fuzzy线性算子, $U\in\mathbf{F}(Y)$是绝对凸集.当ϕ是满射时, $T_\phi^{-1}(U)$亦是绝对凸的.

证明 先证$T_\phi^{-1}(U)$的平衡性.由U的平衡性知,对任何$|k|\leq 1$,有$kU\subset U$,于是

$$T_\phi^{-1}(kU)\subset T_\phi^{-1}(U). \tag{1}$$

当$k\neq 0$时,对$\forall x\in X$,有

$$(kT_\phi^{-1}(U))(x)=T_\phi^{-1}(U)(\frac{1}{k}x)=\phi^{-1}(U)(T(\frac{1}{k}x))$$

$$=\phi^{-1}(U(\frac{1}{k}Tx))=\phi^{-1}(kU(TX))$$

* 1995年3月30日收到.

$$= T_{\phi}^{-1}(kU)(x);\tag{2}$$

当 $k=0$ 时,若 $x=\theta^{(X)}$,注意到 ϕ 是严格递增的满射,故 ϕ^{-1} 也是严格递增的,则有

$$\begin{aligned}(0T_{\phi}^{-1}(U))(\theta^{(X)}) &= \sup_{t\in x} T_{\phi}^{-1}(U)(t) = \sup_{t\in x}\phi^{-1}(U(Tt))\\ &\le \phi^{-1}\sup_{t\in x} U(Tx) \le \phi^{-1}(\sup_{y\in Y} U(y))\\ &= \phi^{-1}((0U)(\theta^{(Y)})) = \phi^{-1}(0U(T\theta^{(x)})) = T_{\phi}^{-1}(0U)(\theta^{(X)}).\end{aligned}\tag{3}$$

若 $x\neq\theta^{(X)}$,

$$(0T_{\phi}^{-1}(U))(x) = 0 \le T_{\phi}^{-1}(0U)(x).\tag{4}$$

综合(2),(3),(4)有 $kT_{\phi}^{-1}(U)\subset T_{\phi}^{-1}(kU)$,再由(1)有 $kT_{\phi}^{-1}(U)\subset T_{\phi}^{-1}(U)$,因此 $T_{\phi}^{-1}(U)$ 是平衡的.

再证 $T_{\phi}^{-1}(U)$ 的凸性. 对任意 $\lambda\in I_0$,注意到 ϕ^{-1} 的严格递增性,有

$$\begin{aligned}T_{\phi}^{-1}(U)(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \phi^{-1}(U(T(\lambda x+(1-\lambda)y)))\\ &= \phi^{-1}(U(\lambda Tx+(1-\lambda)Ty))\\ &\ge \phi^{-1}(\min\{U(Tx),U(Ty)\})\\ &= \min\{\phi^{-1}(U(Tx)),\phi^{-1}(U(Ty))\}\\ &= \min\{T_{\phi}^{-1}(U)(x),T_{\phi}^{-1}(U)(y)\}.\end{aligned}$$

由此获知结论成立,这里 $\theta^{(X)}$、$\theta^{(Y)}$ 分别是 X、Y 上的零点.

引理 2 任意 Fuzzy 点是有界 Fuzzy 集.

证明 $x_\lambda\in X$ 是任意 Fuzzy 点. 对于 $\alpha\in I_0$,由[1]知任何 Fuzzy 拓扑线性空间 $(X,\mathcal{T})$ 都存在 θ_α 的正规、平衡且 $Q-\alpha$ 吸收的重域基,因此不妨设 U 是 θ_α 的 $Q-\alpha$ 吸收的重域,即存在 $\delta>0$,使 $x_\alpha\in\delta U$,也就是 $(\delta U)(x)>1-\alpha$,因此必存在 $0<\varepsilon<\alpha$ 使 $(\delta U)(x)=1-\alpha+\varepsilon>1-\alpha$,于是 $(\delta U)(x)\ge\min\{\lambda,1-\alpha+\varepsilon\}$,从而有

$$\begin{aligned}(\{x_\lambda\}\cap(1-\alpha+\varepsilon)^*)(x) &= (x_{\min(\lambda,1-\alpha+\varepsilon)})(x)\\ &= \min(\lambda,1-\alpha+\varepsilon) \le (\delta U)(x).\end{aligned}$$

而当 $y\neq x$ 时有

$$(\{x_\lambda\}\cap(1-\alpha+\varepsilon)^*)(y) = 0 \le (\delta U)(y).$$

由上我们获得 $\{x_\lambda\}\cap(1-\alpha+\varepsilon)^*\subset\delta U$,即 $\{x_\lambda\}$ 是 α-有界集. 由 α 的任意性知 $\{x_\lambda\}$ 是有界 Fuzzy 集.

引理 3 吸收任意有界 Fuzzy 集的 Fuzzy 集是 Q 吸收的.

证明 设 $A\in\mathcal{F}(x)$ 吸收任意有界 Fuzzy 集. 对任意 Fuzzy 点 $x_\lambda\in X$,因为 $\{x_{1-\frac{1}{2}\lambda}\}$ 是有界 Fuzzy 集,所以 A 吸收 $\{x_{1-\frac{1}{2}\lambda}\}$,即有 $\alpha>0$ 及 $0<\varepsilon<\lambda$ 使

$$\{x_{1-\frac{1}{2}\lambda}\}\cap(1-\lambda+\varepsilon)^*\subset\alpha A.$$

因为 $x_\lambda\in\{x_{1-\frac{1}{2}\lambda}\}\cap(1-\lambda+\varepsilon)^*$,所以 $x_\lambda\in\alpha A$,于是 A 是 $Q-\lambda$ 吸收的. 由 λ 的任意性知 A 是 Q 吸收的.

定理 1 　$(X,\mathcal{T})$是 Fuzzy 局部凸空间,则下列陈述等价:

(1) 　$(X,\mathcal{T})$是 Fuzzy 有界型空间.

(2) 　吸收每个有界 Fuzzy 集的绝对凸 Fuzzy 集都是 θ^{x}的邻域;

(3) 　对任何 Fuzzy 局部凸空间$(Y,\mathcal{U})$, T_ϕ是 X 到 Y 的有界 Fuzzy 线性算子[2]. 若 ϕ是满射,则 T_ϕ在 X 上 Fuzzy 连续.

证明 　(1) ⇨(2)

设$(X,\mathcal{T})$是 Fuzzy 有界型空间, W 是$(X,\mathcal{T})$中吸收每个有界 Fuzzy 集的绝对凸 Fuzzy 集,由引理 3 知 W 是 Q 吸收的. 记 W 的 Minkowski 泛函为 $p: p(x_\lambda) = \inf\{t>0, x_\lambda \in tW\}$. 设 $A \in \mathcal{F}(X)$是任意有界 Fuzzy 集,则 W 吸收 A,即对任意 $\lambda \in I_0$,有 $\alpha>0$ 及 $0<\varepsilon<\lambda$使

$$A \cap (1-\lambda+\varepsilon)^* \subset \alpha W.$$

若 $x_t \in A \cap (1-\lambda+\varepsilon)^*$,则 $x_t \in \alpha W$,由 p 的定义知 $p(x_t) \leq \alpha$. 因此 p 在有界 Fuzzy 集 A 上是有界的,而$(X,\mathcal{T})$是 Fuzzy 有界型空间,故 p 在 X 上 Fuzzy 连续. 记 $U = \cup\{x_{1-\lambda}: p(x_\lambda) < 1, x_\lambda \in X\}$. 对于任意 $\beta \in I_0$,因为 $p(\theta_\beta^{(x)}) = 0$,所以由 p 的定义知,对 $p(\theta_\beta^{(X)})$及 $\varepsilon = 1$,有 $0<\delta<\lambda$使得 $p(\theta_{\beta-\delta}^{(x)}) < p(\theta_\beta^{(x)}) + 1 = 1$,故 $\theta_{1-\beta+\delta}^{(x)} \in U$,于是 $U(\theta^{(x)}) \geq 1-\beta+\delta > 1-\beta$,即 $\theta_\beta^{(X)} \in U$. 又 $U = p^{-1}((-1,1))$,由 p 的 Fuzzy 连续性即知 U 是$\theta_\beta^{(x)}$的重域. 若 $x_\lambda \in U$,则 $U(x) = \sup\{1-\alpha: p(x_\alpha) < 1\} > 1-\lambda$,故存在 $\lambda_{\in} I_0$,使 $\lambda > \lambda_0$ 且 $\phi(x_{\lambda_0}) < 1$,所以 $p(x_\lambda) \leq p(x_{\lambda_0}) < 1$. 由 Minkowski 泛函的定义及 W 的平衡性知,存在 $\gamma>0, 0<\gamma<1$,使得 $W(x) \geq \gamma W(X) > 1-\lambda$,于是 $x_\lambda \in W$. 因此 $U \subset W$,从而 W 是$\theta_\beta^{(x)}$ 的重域. 由[4]中引理 11 及 β的任意性知 W 是$\theta^{(x)}$的邻域.

(2) ⇨(3) 　设$(Y,\mathcal{U})$是 Fuzzy 局部凸空间, $T_\phi: (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{U})$的有界 Fuzzy 线性算子,其中 ϕ是满射. 对于任意 $\lambda \in I_0$、$(Y,\mathcal{U})$中点 $\theta_{\phi(\lambda)}^{(Y)}$的任一绝对凸重域 U 及$(X,\mathcal{T})$中有界 Fuzzy 集 A,由[2]中引理 2 知,有 $\delta_0>0$ 及 $0<\varepsilon<\phi(\lambda)$使当$|\beta| < \delta_0$ 时有

$$\beta T_\phi(A) \cap (1-\phi(\lambda)+\varepsilon)^* \subset U,$$

于是

$$T_\phi^{-1} T_\phi(\beta A) \cap T_\phi^{-1}((1-\phi(\lambda)+\varepsilon)^*) \subset T_\phi^{-1}(U),$$

从而

$$\beta A \cap T_\phi^{-1}((1-\phi(\lambda)+\varepsilon)^*) \subset T_\phi^{-1}(U). \tag{5}$$

对于 $\forall y \in Y$,有

$$T_\phi^{-1}((1-\phi(\lambda)+\varepsilon)^*)(y) = \phi^{-1}((1-\phi(\lambda)+\varepsilon)^*(Ty))$$
$$= \phi^{-1}(1-\phi(\lambda)+\varepsilon) = 1-\phi^{-1}(\phi(\lambda)-\varepsilon).$$

由 ϕ^{-1}的严格递增性知

$$\varepsilon' = \phi^{-1}(\phi(\lambda)) - \phi^{-1}(\phi(\lambda)-\varepsilon) = \lambda - \phi^{-1}(\phi(\lambda)-\varepsilon) > 0,$$

从而 $0<\varepsilon'<\lambda$且 $1-\phi^{-1}(\phi(\lambda)-\varepsilon) = 1-\lambda+\varepsilon'$,所以

$$T_\phi^{-1}((1-\phi(\lambda)+\varepsilon)^*) = (1-\lambda)+\varepsilon')^*.$$

由此由(5)有

$$\beta A \cap (1-\lambda+\varepsilon)^{*} \subset T_{\phi}^{-1}(U).$$

由 $\lambda \in I_0$ 的任意性知 $T_{\phi}^{-1}(U)$ 吸收有界 Fuzzy 集 A,又由引理 1 知 $T_{\phi}^{-1}(U)$ 是绝对凸的,于是 $T_{\phi}^{-1}(U)$ 是 $\theta^{(x)}$ 的邻域,特别地 $T_{\phi}^{-1}(U)$ 是 $\theta^{(x)}\lambda$ 的重域. 记 $V = T_{\phi}^{-1}(U)$,由[2]中命题 3 得 $T_{\phi}(V) = T_{\phi}T_{\phi}^{-1}(U) \subset U$,即 T_{ϕ} 在 $\theta^{(x)}\lambda$ Fuzzy 连续. 由[2]定理 2 及 $\lambda \in I_0$ 的任意性即知 T_{ϕ} 在 X 上 Fuzzy 连续.

(3) ⇒(1) 用反证法. 假设 $(X,\mathcal{T})$ 不是 Fuzzy 有界型的,则存在 $(X,\mathcal{T})$ 上的半范 q,使得 q 在有界 Fuzzy 集上有界,但在 x 上不 Fuzzy 连续. P 是决定 $\mathcal{T}$ 的半范族,记 $P_1 = P \cup \{q\}$,由 P_1 决定的拓扑记为 $\mathcal{T}_1$,易知 $\mathcal{T}_1$ 是局部凸拓扑,由[5]中定理 4 知 $(X,\mathcal{T})$ 与 $(X,\mathcal{T}_1)$ 有同样多的有界 Fuzzy 集,但 $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$ 且 $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}$. 令 T 是 X 上的恒同映射,ϕ 是 I_0 上的恒同映射,则 T_{ϕ} 是 $(X,\mathcal{T})$ 到 $(X,\mathcal{T}_1)$ 的有界 Fuzzy 线性算子,由于 $T_{\phi}(A) = A$, $T_{\phi}^{-1}(B) = B$ 及 $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}$ 且 $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}$,则必存在这样的 $G \in \mathcal{T}_1$ 使得 $T_{\phi}^{-1}(G) = G \notin \mathcal{T}$,因此由[2]定理 3 知 T_{ϕ} 在 X 上不 Fuzzy 连续. 这与(3)矛盾.

推论 1 $(X,\mathcal{T})$ 是 Fuzzy 有界型空间,$(Y,\mathcal{U})$ 是局部凸空间, T_{ϕ} 是 X 到 Y 的 Fuzzy 线性算子. 若 ϕ 是满射,则 T_{ϕ} 连续 ⇔ T_{ϕ} 有界.

证明 由定理 1 及[2]中定理 4 立即可得.

定理 2 若 $(X,\mathcal{T})$ 是 Q-C_I 的 Fuzzy 局部凸空间[6],则 $(X,\mathcal{T})$ 是 Fuzzy 有界型空间.

证明 设 $(Y,\mathcal{U})$ 是任意 Fuzzy 局部凸空间, T_{ϕ} 是 X 到 Y 的有界 Fuzzy 线性算子,其中 ϕ 是满射. 由[3]定理 5 知 T_{ϕ} 是 Fuzzy 连续的,由定理 1 知 $(X,\mathcal{T})$ 是 Fuzzy 有界型空间.

下面讨论由 $(X,\mathcal{T})$ 诱出的 Fuzzy 拓扑线性空间[7] 是有界型空间的问题. 注意到,设 $\gamma \in [0,1)$,若 $W \in \omega(\mathcal{T})$,则 $\sigma_{\gamma}(W) \in \mathcal{T}$;若 $U \in \mathcal{T}$,则当 $\gamma \neq 0$ 时 $\gamma \chi_U \in \omega(J)$,这里 χ_U 表示 U 的特征函数.

定理 3 设 $(X,\mathcal{T})$ 是通常的局部凸拓扑线性空间,$(X,\omega(\mathcal{T}))$ 是诱出的 Fuzzy 拓扑线性空间,则 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 是 Fuzzy 有界型空间当且仅当 $(X,\mathcal{T})$ 是有界型空间.

证明 因为 $(X,\mathcal{T})$ 是通常的局部凸空间,由[8]中命题 2.4 知 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 中吸收每个有界 Fuzzy 集的绝对凸 Fuzzy 集. 对于 $\forall \gamma \in [0,1)$, $\sigma_{\lambda}(U) = \{x : U(x) > \gamma\}$ 是绝对凸集,同时, $\sigma_{\lambda}(U)$ 在 $(X,\mathcal{T})$ 中吸收任意有界集. 事实上,任取 $(X,\mathcal{T})$ 中的有界集 B,由[4]中定理 3.2 知 B 也是 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 中的有界集,因此 U 吸收 B. 于是对于 $0 < \lambda < 1-\gamma$ 有 $\alpha > 0$ 及 $0 < \varepsilon < \lambda$ 使 $0 < \lambda - \varepsilon < 1 - \gamma$ 且 $B \cap (1-\lambda+\varepsilon)^{*} \subset \alpha U$,从而有

$$\sigma_{\gamma}(B) \cap \sigma_{\gamma}(1-\lambda+\varepsilon)^{*}) = \sigma_{\lambda}(B) \cap \sigma_{\lambda}((1-\lambda+\varepsilon)^{*}) \subset \sigma_{\gamma}(\alpha U)$$
$$= \alpha\sigma_{\gamma}(U),$$

即

$$B \cap \sigma_{\gamma}((1-\lambda+\varepsilon)^{*}) \subset \alpha\sigma_{\gamma}(U),$$

而 $1-\lambda+\varepsilon > \gamma$,于是有 $B \subset \alpha\sigma_{\gamma}(U)$,即 $\sigma_{\gamma}(U)$ 吸收 B. 因为 $(X,\mathcal{T})$ 是有界型空间,所以 $\sigma_{\gamma}(U)$ 是 θ 的邻域. 因此,$\chi_{\sigma_{\gamma}(U)}$ 是 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 中 θ 的邻域,取 $U_1 = r\chi_{\sigma_r(U)}$,则 U_1 是 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 中 θ 的邻域,且 $U_1 \subset U$. 于是 U 是 θ 的邻域,即 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 是 Fuzzy 有界型空间.

反之,假设 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 是 Fuzzy 有界型空间, V 是 $(X,\mathcal{T})$ 中吸收每个有界集的绝对凸集,令 $U = \chi_V$,则易知 U 是绝对凸 Fuzzy 集,且 U 在 $(X,\omega(\mathcal{T}))$ 中吸收任意有界 Fuzzy 集. 事实上,

若 B 是$(X,\omega(\mathcal{T}))$中任意的有界 Fuzzy 集,记 $P=\{x:B(x)>0\}$. 取 W 是$(X,\mathcal{T})$中 θ的开邻域,则 $\chi_W\in\omega(\mathcal{T})$ 是$(X,\omega(\mathcal{T}))$中 θ的邻域,所以对任意 $\varepsilon\in I_0$,存在 $t>0$ 及 $0<\varepsilon<\lambda$,使得 $B\cap(1-\lambda+\varepsilon)^*\subset t\chi_W$,于是

$$\sigma_0(B\cap(1-\lambda+\varepsilon)^*)\subset t\sigma_0(\chi_w),$$

即

$$\sigma_0(B)\cap X\subset tW,$$

也就是 $P\subset tW$. 因此 P是$(X,\mathcal{T})$中的有界集,从而 V 吸收 P. 因此,存在 $\alpha>0$ 使得 $P\subset\alpha V$,由此推知 $B\subset\alpha U$. 事实上,若 $x_\lambda\in B$,则 $B(x)\geq\lambda>0$,即 $x\in P$,因此 $x\in\alpha V$,于是$\frac{x}{\alpha}\in V$,而 $U(\frac{x}{\alpha})=\chi_V(\frac{x}{\alpha})=1\geq\lambda$,所以$(\frac{x}{\alpha})_\lambda\in U$,即 $x_\lambda\in\alpha U$. 因此,对 $\forall\lambda\in I_0$ 及 $0<\varepsilon<\lambda$,均有

$$B\cap(1-\lambda+\varepsilon)^*\subset B\subset\alpha U,$$

于是 U 吸收 B,而$(X,\omega(\mathcal{T}))$是 Fuzzy 有界型空间,所以 U 是θ的领域. 因此存在 $U_1\in\omega(\mathcal{T})$ 使 $\theta\in U_1\subset U=\chi_V$,而 $\sigma_0(U_1)\in\mathcal{T}$且 $\theta\in\sigma_0(U_1)\subset U$,于是 V 是θ的邻域,由此推知$(X,\mathcal{T})$ 是有界型空间.

参 考 文 献

[1] 吴从炘、马明,模糊分析学基础,国防工业出版社,1994.

[2] 吴从炘、方锦暄, FTL-空间上的 Fuzzy 连续线性算子, 模糊系统与数学,5:2(1991),11 - 19.

[3] 吴从炘、李建华, 凸性与 Fuzzy 拓扑线性空间,科学探索, 4:1(1984),1 - 4.

[4] 吴从炘、方锦暄, 有界性与局部有界 Fuzzy 拓扑线性空间,模糊数学,5:4(1985), 80 - 89.

[5] 吴从炘,李建华,凸性与 Fuzzy 拓扑线性空间(II),科学通报,30:9(1985),796.

[6] Pu Paoming and Liu Yingming, *Fuzzy topology I: Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convegence*, J. Math. Anal. Appl., 76(1980), 571 - 599.

[7] M. P. Weiss, *Fixed points, separation and induced topolopies for fnzzy sets*, J. Math. Appl., 50 (1975), 142 - 150.

[8] 吴从炘、马明, 诱出 Fuzzy 拓扑的一个充分条件及其应用,哈尔滨工业大学学报, 1985(数学增刊), 35 - 38.

A Specific Locally Convex Fuzzy Space

Jin Cong

(Dept of Comp Sci., Hubei University, Wuhan 430062)

Abstract

We discuss an equivalent theorem for bornological fuzzy space, and we prove that $Q-C_I$ Fuzzy locally convex space is bornological space.

Keywords Fuzzy locally convex space, Fuzzy seminorm, Fuzzy bornological space.