

半正定复方阵的 Kronecker 乘积*

李 炯 生

(中国科学技术大学数学系, 合肥230026)

摘 要 本文应用半正定(未必是 Hermite)复方阵在合同下的标准形给出两个半正定(未必是 Hermite)复方阵的 Kronecker 乘积为半正定的充要条件.

关键词 半正定复方阵, 合同标准形, Kronecker 乘积

分类号 AM S(1991) 15A 57/CCL O 151. 21

根据 Berman A. 和 Plemmons R. J. ^[1], n 阶复方阵 A 称为(半)正定的, 若对任意 n 维复的非零行向量 z , 均有 $\operatorname{Re}(zAz^*) > 0$ ($\operatorname{Re}(zAz^*) \geq 0$), 其中 $\operatorname{Re} a$ 表示复数 a 的实数部分, 而 z^* 表示 z 的共轭转置. n 阶复方阵 A 和 B 称为合同的, 若有 n 阶可逆复方阵 P , 使 $B = PAP^*$. 最近 [2] 给出了 n 阶半正定复方阵在合同下的标准形如下:

引理1 n 阶半正定复方阵 A 合同于如下的标准形:

$$\tilde{A} = \operatorname{diag}(I_m, A_1, A_2, A_3, O_{n-r}), \quad (1)$$

其中 r 是 A 的秩 $r(A)$, I_m 和 O_{n-r} 分别是 m 阶单位方阵和 $n-r$ 阶零方阵,

$$A_1 = \operatorname{diag}(1 + i\lambda_1, 1 + i\lambda_2, \dots, 1 + i\lambda_k), \quad (2)$$

$$A_2 = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)_{2l \times 2l}, \quad (3)$$

$$A_3 = \operatorname{diag}(iI_f, -iI_g), \quad (4)$$

$m = r(A) - r(K(A))$, $k = \deg(D_r(\lambda)) - r(A) + r(K(A))$, $l = r(H(A)) - \deg(D_r(\lambda))$, $f = p - u - r(H(A)) + \deg(D_r(\lambda))$, $g = q - v - r(H(A)) + \deg(D_r(\lambda))$, 而 $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $K(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*)$, $\deg(D_r(\lambda))$ 是 λ 矩阵 $\lambda H(A) + iK(A)$ 的 r 阶行列式因子 $D_r(\lambda)$ 的次数, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 $D_r(\lambda)$ 的所有非零的根, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_{u+v}$, $k = u + v$, 且 p 和 q 分别是 Hermite 方阵 $K(A)$ 的正负惯性指数.

由引理1易得

引理2 n 阶半正定复方阵 A 合同于如下的标准形:

$$\tilde{A} = \operatorname{diag}(I_m, A_1), \quad (5)$$

其中 A_1 同引理1

由半正定复方阵与复方阵合同的定义易知, 若 n 阶复方阵 A 和 B 合同, 且 A 半正定, 则 B

* 1995年3月2日收到 1997年11月27日收到修改稿

也是半正定的; 若 A 和 B 分别是 n 阶和 m 阶复方阵, 则 $\text{diag}(A, B)$ 半正定, 当且仅当 A 和 B 半正定

熟知, 两个半正定 Hermite 方阵 A 和 B 的 Kronecker 乘积 $A \otimes B$ 必是半正定的, 这一结论对半正定(未必是 Hermite)复方阵并不成立. 本文将应用半正定复方阵在合同下的标准形给出两个半正定复方阵的 Kronecker 乘积仍是半正定的充要条件. 为此, 需要以下的定义: n 阶半正定复方阵 A 称为次数极大的, 若 $\deg(D_r(\lambda)) = r(A)$; 称 n 阶半正定复方阵 A 是类1(类2)的, 若 $K(A)$ 是半正(负)定的; 称 A 是同正(同负)的, 若 $D_r(\lambda)$ 的正根(负根)个数等于 $K(A)$ 的正(负)惯性指数

应用半正定复方阵在合同下的标准形容易证明

引理3 n 阶半正定复方阵 A 是类1的, 当且仅当 A 合同于如下的标准形:

$$\text{diag}(I_m, A_1, iI_f, O_{n-r}), \quad (6)$$

其中 m, r, f 和 A_1 同引理1, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$

引理4 n 阶半正定复方阵 A 是类2的, 当且仅当 A 合同于如下的标准形:

$$\text{diag}(I_m, A_1, -iI_g, O_{n-r}), \quad (7)$$

其中 m, r, g 和 A_1 同引理1, 且 $0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$

引理5 n 阶半正定复方阵 A 是次数极大的, 当且仅当 A 合同于如下的标准形:

$$\text{diag}(I_m, A_1, O_{n-r}). \quad (8)$$

引理6 n 阶半正定复方阵 A 是同正的, 当且仅当 A 合同于如下的标准形:

$$\text{diag}(I_m, A_1, -iI_g, O_{n-r}). \quad (9)$$

引理7 n 阶半正定复方阵 A 是同负的, 当且仅当 A 合同于如下的标准形:

$$\text{diag}(I_m, A_1, iI_f, O_{n-r}). \quad (10)$$

现在讨论半正定复方阵的 Kronecker 乘积

定理8 设 A 和 B 分别是 n 阶半正定复方阵和 m 阶半正定 Hermite 方阵, 则 $A \otimes B$ 是半正定的

证明 由引理1, A 合同于标准形 $\tilde{A}$. 而半正定 Hermite 方阵 B 合同于 $\tilde{B} = \text{diag}(I_{r(B)}, O_{m-r(B)})$. 因此 $A \otimes B$ 合同于 $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$. 应用矩阵的 Kronecker 乘积的定义, 容易验证 $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ 是半正定的, 从而 $A \otimes B$ 半正定

定理9 设 A 和 B 分别是 n 阶半正定 Hermite 方阵和 m 阶半正定复方阵, 则 $A \otimes B$ 是半正定的. 证明类同于定理8, 略

下面是本文主要定理

定理10 设 A 和 B 分别是 n 阶和 m 阶半正定而非 Hermite 的复方阵, 且 λ_a 是 λ 矩阵 $\mathcal{H}(A) + iK(A)$ 的 $r = r(A)$ 阶行列式因子 $D_r(\lambda)$ 的任意一个根, μ_b 是 $\mathcal{H}(B) + iK(B)$ 的 $r' = r(B)$ 阶行列式因子 $D_{r'}(\lambda)$ 的任意一个根, 则 $A \otimes B$ 为半正定的充要条件是, $\lambda_a \mu_b \leq 1$, 且下列条件之一成立:

- (1) A 是类1且非次数极大的, B 是类2且非次数极大的;
- (2) A 是类1且次数极大的, B 是同正且非次数极大的;
- (3) A 是类2且非次数极大的, B 是类1且非次数极大的;
- (4) A 是类2且次数极大的, B 是同负且非次数极大的;

- (5) A 是同负且非次数极大的, B 是类2且次数极大的;
 (6) A 是同正且非次数极大的, B 是类1且次数极大的;
 (7) A 和 B 都是次数极大的

证明 设 A 和 B 是半正定而非 Hermite 的复方阵 应用引理1分别求得 A 和 B 在合同下的标准形 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$, 则 $A \odot B$ 合同于 $\tilde{A} \odot \tilde{B}$, 而且 $A \odot B$ 半正定, 当且仅当 $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ 半正定 现在设 $A \odot B$ 半正定, 则 $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ 半正定, 由此可证 $\lambda_a \mu_b \leq 1$, 而且 $\tilde{A}$ 不含块 A_2 同样 $\tilde{B}$ 不含形如(3)的块 B_2 然后证明, $\tilde{A}$ 中的块 A_3 不同时含有块 iI_f 和块 $-iI_g$, 因此 $fg = 0$ 同样 $\tilde{B}$ 中形如(4)的块 $B_3 = \text{diag}(iI_f, -iI_g)$ 也满足 $f \cdot g \leq 0$ 进一步可证 $ff \leq 0, gg \leq 0$ 当 $f > 0$ 时, $g = 0$ 且 $f \leq 0$ 若 $g \leq 0$, 则由引理4和5可知, B 是类2且次数极大的, 而由引理5和引理7可知, A 是同负且非次数极大的, 即(5)成立; 若 $g > 0$, 则 B 是类2且非次数极大的, 而 A 是类1且非次数极大的, 即(1)成立 同理可证, 当 $g > 0$ 时, B 是类1且次数极大的, 而 A 是同正且非次数极大的, 即(6)成立, 或者 A 是类2且非次数极大的, 而 B 是类1且非次数极大的, 即(3)成立 当 $f = g = 0$ 时, 同理可证, (2), (4)或(7)之一成立 反之容易验证, 若 $\lambda_a \mu_b \leq 1$, 且(1), (2), ..., (7)之一成立, 则 $\tilde{A} \odot \tilde{B}$ 是半正定的 从而 $A \odot B$ 半正定

推论11 设 A 和 B 分别是 n 阶和 m 阶正定而非 Hermite 的复方阵, 则 $A \odot B$ 为正定的充要条件是 $\lambda_a \mu_b \leq 1$, 其中 λ_a 是 $\lambda H(A) + iK(A)$ 的 $r = r(A)$ 阶行列式因子 $D_r(\lambda)$ 的任意一个根, μ_b 是 $\lambda H(B) + iK(B)$ 的 $r \leq r(B)$ 阶行列式因子 $D_r(\lambda)$ 的任意一个根

证明 只需注意正定复方阵一定是次数极大的, 由定理10即得此推论

参 考 文 献

- 1 Berman A and Plemmons P L. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* Academic Press, New York, 1979
- 2 李炯生 半正定复方阵 数学研究, 1998, 31(2): 207- 211

Kronecker Products of Positive Semidefinite Complex Matrices

L i J iongsheng

(Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

An $n \times n$ (not necessarily Hermitian) complex matrix A is positive semidefinite if $\text{Re}(zAz^*) \geq 0$ for each n -dimensional complex row vector z . In this paper, we give a necessary and sufficient condition for the Kronecker product of two positive semidefinite complex matrices to be positive semidefinite.

Keywords positive semidefinite complex matrix, canonical form under congruence, Kronecker product