第18卷第4期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 4
1998年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1998

区间上 k 段单调连续自映射的 k 阶迭代根*

孙太祥　　席鸿建

(广西大学数学系, 南宁530004)

摘　要　本文得到了区间 $I=[0,1]$ 上的 k 段单调连续自映射具有 k 阶迭代根的充要条件.

关键词　k 段单调连续自映射, 单峰自映射, 反单峰自映射, 反序函数, 迭代根, 特征区间

分类号　AMS(1991) 58F08/CCL O172.1

1　引　言

本文讨论区间 $I=[0,1]$ 上的 k 段单调连续自映射的 k 阶迭代根. 对任意实数 $a<b$, 用 $G^0([a,b])$ 表示 $[a,b]$ 上的所有连续自映射之集.

定义1　设 $F(x)\in G^0(I)$ 在 I 上具有 $k-1$ 个极值点 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$, 且 $a_0=0<a_1<\cdots<a_{k-1}<a_k=1$, $F(x)$ 在每个区间 $[a_{i-1}, a_i]$ 上严格单调 $(i=1,2,\cdots,k)$, 则称 $F(x)$ 是 I 上的 k 段单调连续自映射, 并记 $N(F)=k$.

有时也不加区别地称定义1中 $F(x)$ 为逐段单调连续自映射. 本文中所涉及的有关定义及性质, 如: 迭代根、特征区间以及迭代根的性质等, 可参见文献[1].

设 $F(x)$ 是 I 上的 k 段单调连续自映射. 在文献[1]中, 杨路、张景中证明了: 如果 $N(F)<N(F^2)$, 那么 $F(x)$ 无 k 阶迭代根. 如果 $N(F)=N(F^2)$, 设 $[p,q]$ 是 $F(x)$ 的特征区间, 当 $F(x)$ 在 I 上取得值 p (或 q), 则 $F(x)$ 在 $[p,q]$ 上也取得值 p (或 q) 时, $F(x)$ 是否具有指定阶迭代根的问题在文献[1]中也完全得到解决; 同时, 文献[1]指出, 若 $F(x)$ 满足条件

(A)　$N(F)=N(F^2)$; $F(x)$ 在 I 上取得值 p (或 q), 但在 $[p,q]$ 上取不到 p (或 q) 时, 则对任意自然数 $n>k$, $F(x)$ 无 n 阶迭代根.

然而, 满足条件(A)的 $F(x)$ 是否具有 k 阶迭代根呢? 以下我们将讨论这个问题.

2　k 段单调连续自映射的 k 阶迭代根的性态

引理1[1]　设 $F(x)$ 是 I 上的 k 段单调连续自映射, $S(F)$ 是 $F(x)$ 的极值点之集, 那么, 对任自然数 n:

(1)　$F^n(x)$ 也是 I 上的逐段单调自映射;

(2)　$N(F)\le N(F^2)\le\cdots\le N(F^n)\le\cdots$;

*　1995年9月11日收到. 广西自然科学基金项目.

(3) $S(F^n)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\{x\in(0,1)\cdot F^i(x)\in S(F)\}$;

(4) $N(F^{n+s})=N(F^s)$, 这里 $s=\min\{i\cdot N(F^{i+1})=N(F^i)\}$. □

用 $H(F)$ 表示引理1(4)中的 s.

引理2[1] 设 $F(x)\in G^0(I)$ 是个 k 段单调连续自映射. $[p,q]$ 是其特征区间, $f(x)$ 是 $F(x)$ 的 n 阶迭代根, 则

(1) $f(x)$ 也是个逐段单调连续自映射;

(2) $f([p,q]\subset[p,q]$. □

下面的定理1是文献[1]中定理3的推广.

定理1 设 I 上的 k 段单调连续自映射 $F(x)$ 满足条件(A), $F(x)$ 有 n 阶迭代根 $f(x)$ 且 $f(x)$ 是 m 段单调连续自映射, 则 $m\le k-n+2$.

证明 因 $F(x)=f^n(x)$, 由引理1知

$$N(f)\le N(f^2)\le N(f^3)\le\cdots\le N(f^{n-1})\le N(f^n)=N(F).$$

如果 $n=2$, 显然有 $m\le k=k-n+2$. 因此, 不妨设 $n\ge3$, 并设 $H(f)=t$, 由 $N(F)=N(F^2)$ 知 $t\le n$. 现证 $t\ge n-1$, 用反证法, 假设 $t\le n-2$, 那么 $N(f^{n-2})=N(F)\le N(f^{2n-2})\le N(F^2)=N(F)$, 即 $H(f^{n-2})=1$. 因 $[\min F,\max F]\subset[\min f^{n-2},\max f^{n-2}]$, 从而 $f^{n-2}_{(x)}$ 与 $F(x)$ 有相同的极值点, 从而特征区间相同, 即 $f^{n-2}(I)\subset[p,q]$, $f(x)$ 在 $[p,q]$ 上严格单调

(1) 若 $f(x)$ 在 $[p,q]$ 上严格递增, 因 $F(x)$ 在 I 上取得 p(或 q), 那么 $f(x)$ 必在 $[p,q]$ 上取得 p(或 q), 即 $f(p)=p$(或 $f(q)=q$), 从而 $F(p)=p$(或 $F(q)=q$), 这与条件(A)矛盾

(2) 若 $f(x)$ 在 $[p,q]$ 上严格递减, 因 $F(x)$ 在 I 上取得 p(或 q), 那么 $f(p)=q$ 且 $f(q)=p$, 这时 $F(x)$ 在 $[p,q]$ 上取得 p 及 q, 这同样与条件(A)矛盾

由上可知 $t\ge n-1$, 由 $N(f)<N(f^2)<\cdots<N(f^t)=N(F)$ 可得 $k=N(f^t)\ge m+t-1\ge m+n-2$, 从而 $m\le k-n+2$. □

由定理1可以得到

推论1 设 k 段单调连续自映射 $F(x)$ 满足条件(A), $F(x)$ 有 k 阶迭代根 $f(x)$, 则 $f(x)$ 是以 $F(x)$ 的某个极值点 a 为极值点的2段单调连续自映射, 并且(1) 若 $k\ge3$, 则 $N(f^{k-1})=N(F)$, $N(f^{i+1})=N(f^i)+1$, $1\le i\le k-2$; (2) 若 $k\ge3$ 且 $0\le i\le k-2$ 时, $A_i\equiv\{x\in(0,1)\cdot f^i(x)=a\}$ 是单点集, 且 $A_i\ne A_j$, $i\ne j$. □

称具有极大(或极小)值点的2段单调连续自映射为单峰(或反单峰)自映射.

定理2 设 k 段单调连续自映射 $F(x)\in G^0(I)$ 满足条件(A), 且有 k 阶迭代根 $f(x)$, $F(x)$ 的极值点为 $a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}$, 则 $F(x)$ 的特征区间为 $[0,a_1]$ 或 $[a_{k-1},1]$, 并且

(1) 若 $[0,a_1]$ 是 $F(x)$ 的特征区间, 则 $f(x)$ 是以 a_1 为极值点的反单峰自映射;

(2) 若 $[a_{k-1},1]$ 是 $F(x)$ 的特征区间, 则 $f(x)$ 是以 a_{k-1} 为极值点的单峰自映射

证明 因 $F(x)$ 有 k 阶迭代根 $f(x)$, $f(x)$ 是2段单调连续自映射, 下面用反证法来证 $F(x)$ 以 $[0,a_1]$ 或 $[a_{k-1},1]$ 为特征区间

假如 $F(x)$ 以 $[a_{i-1},a_i]$ 为特征区间 $(1\le i-1<i\le k-1)$, 那么 $k\ge3$, 且 $f(x)$ 以 a_{i-1}

或 a_i 为极值点(否则, 若 $f(x)$ 以 a_s 为极值点, $s \notin \{i-1, i\}$. 由引理1知存在 $j \geq 1$, 使 $f^j(a_i) = a_s$, 这与引理2矛盾); 同理, $f(x)$ 也不会是以 a_{i-1} (或 a_i)为极值点的反单峰(式单峰)自映射, 否则将会有 $f(a_{i-1}) < a_{i-1}$ (或 $f(a_i) > a_i$). 这与引理2矛盾; 如果 $f(x)$ 是以 a_{i-1} 为极值点的单峰自映射, 因 $N(f^2) = N(f) + 1$ (推论1), 则 $f([0, a_{i-1}]) \subset [a_{i-1}, a_i]$ 或 $f([a_i, 1]) \subset [a_{i-1}, a_i]$, 若 $f([a_i, 1]) \subset [a_{i-1}, a_i]$ 将会推出 $F(x)$ 在 $[a_{i-1}, 1]$ 上严格单调, 这是不可能的; 若 $f([0, a_{i-1}]) \subset [a_{i-1}, a_i]$, 则 $f(a_i) = a_{i-1}$, $f^2[a_i, 1]) \subset [a_{i-1}, a_i]$, 这时必有 $f(a_{i-1}) = a_i$(否则, 若 $f(a_{i-1}) < a_i$, 因 $F(x)$ 的极值点全在$[a_{i-1}, 1)$ 上, 则 $F(a_s) = f^k(a_s) \in (a_{i-1}, a_i)$ $(1 \leq s \leq k-1)$. $\{F(0), F(1)\} \subset (a_{i-1}, a_i)$, 这与条件$(A)$矛盾), 但 $f(a_{i-1}) = a_i$ 且 $f(a_i) = a_{i-1}$ 也会推出 $F(x)$ 在 $[a_{i-1}, a_i]$ 上取得值 a_{i-1} 及 a_i. 这也与条件(A)矛盾; 同理 $f(x)$ 也不会是以 a_i 为极值点的反单峰自映射

综合上述可知 $F(x)$ 的特征区间只能是 $[0, a_1]$ 或 $[a_{k-1}, 1]$. 至于结论(1)、(2), 从以上证明中可以得出 □

3 反序函数及其性质

定义2 设 $F(x) \in G^0([a, b])$ 是个严格递增的函数, $F(a) = a$ 且 $F(b) = b$ 或 $F(a) > a$ 且 $F(b) < b$. 如果存在 $F(x)$ 的不动点 $p \in (a, b)$, 使 $F(x)$ 在 $[a, p]$ 上的不动点之集 E_1 和在 $[p, b]$ 上的不动点之集 E_2 之间存在着反序的一一对应

$$\varphi: E_1 \to E_2, \ \varphi(e) = e' \quad (e \in E_1, \ e' \in E_2),$$

且当 $F(x) - x$ 在 (e_1, e_2) 上为正(负)时, 它在 (e_2', e_1') 上为负(正), 则称 $F(x)$ 是个反序函数

定理3 设 $F(x) \in G^0([a, b])$ 是个严格递增的反序函数, $F(a) > a$ 且 $F(b) < b$, $r_1 = b > r_3 > \cdots > r_{2l-1} > r_{2l+1} = F(b) > r_{2l} = F(a) > r_{2l-2} > \cdots > r_2 > a = r_0$, 则存在严格递减函数 $f(x) \in G^0([a, b])$, 使 $f^{2l}(x) = F(x)$, 且 $f(r_i) = r_{i+1}$, 其中 $0 \leq i \leq 2l$.

为方便起见, 以下用 $\langle c, d \rangle$ 表示以实数 c、d 为端点的闭区间 对任 $F(x) \in G^0(I)$, 记 $F|\langle c, d \rangle$ 为 $F(x)$ 在$\langle c, d \rangle$上的限制, 即 $F|\langle c, d \rangle = F(x)$, $x \in \langle c, d \rangle$.

定理3的证明 设 E_1、E_2、p 如定义2所述, $s = \inf E_1$, $t = \sup E_2$, 则 s、t 也是 $F(x)$ 的不动点, 令 $r_{2l+i} = F(r_i)$, $i \geq 0$, 则数列 r_{2n} 严格递增以 s 为极限, 数列 r_{2n+1} 严格递减以 t 为极限 $(n \geq 0)$.

(1) 若 $s \neq t$, 那么 $F|[s, t] \in G^0([s, t])$ 也是个反序函数, 由文献[1]中的定理[9]知存在严格递减函数 $\bar{f}(x) \in G^0[s, t]$, 使 $\bar{f}^{2l}(x) = F|[s, t]$, $\bar{f}(s) = t$ 且 $\bar{f}(t) = s$. 现定义 $f(x)$ 如下:

(i) 当 $x \in [s, t]$ 时, $f(x) = \bar{f}(x)$;

(ii) 定义 $f(r_i) = r_{i+1}$ $(0 \leq i \leq 2l)$, 且 $f(x)$ 在 $\langle r_i, r_{i+2} \rangle$ $(0 \leq i \leq 2l-2)$ 上是线性的;

(iii) 当 $i \geq 2l-1$ 且 $x \in \langle r_i, r_{i+2} \rangle$ 时, 定义

$$f(x) = F|_{\langle r_{i-2l+1}, r_{i-2l+3} \rangle} \circ f|^{-1}_{\langle r_{i-2l+1}, r_{i-2l+3} \rangle} \circ \cdots \circ f|^{-1}_{\langle r_{i-2}, r_i \rangle} \circ f|^{-1}_{\langle r_{i-1}, r_{i+1} \rangle}.$$

由上述构造知 $f(x)$ 满足定理的要求

(2) 若 $s = t = p$, 仿照情形(1)在 $[a, p) \cup (p, b]$ 上构造 $f(x)$, 再令 $f(p) = p$, 同样可证明这样的 $f(x)$ 也满足定理的要求 □

定理4 设 $F(x) \in G^0([a, b])$ 是个严格递减的函数, 且 $a < F(b) < F(a) < b$, $r_1 = b >$

$r_3 > \cdots > r_{2l-3} > r_{2l-1} = F(a) > p > r_{2l} = F(b) > r_{2l-2} > \cdots > r_2 > a = r_0$，则存在严格递减函数 $f(x) \in G^0([a,b])$，使 $f^{2l-1}(x) = F(x)$，且 $f(r_i) = r_{i+1}$，$0 \leq i \leq 2l-1$．其中 p 是 $F(x)$ 的不动点

证明　取 $r_{2l-1+i} = F(r_i)$，$i \geq 0$，容易证明 $r_0 < r_2 < \cdots < r_{2n} < \cdots < p < \cdots < r_{2n+1} < \cdots < r_5 < r_3 < r_1$，设 $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n} = s$，$\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n+1} = t$，则由 $F(r_{2n}) = r_{2l-1+2n}$ 以及 $F(r_{2n+1}) = r_{2l+2n}$ 知：$F(s) = t$ 及 $F(t) = s$．

(1)　若 $s \neq t$，由文献[1]中定理10知存在严格递减函数 $\bar{f} \in G^0([s,t])$，使 $\bar{f}^{2l-1}(x) = F\big|_{[s,t]}$，$\bar{f}(s) = t$ 且 $\bar{f}(t) = s$，现定义 $f(x)$ 如下：

(i)　当 $x \in [s,t]$ 时，$f(x) = \bar{f}(x)$；

(ii)　定义 $f(r_i) = r_{i+1}(0 \leq i \leq 2l-1)$，且 $f(x)$ 在 $< r_i, r_{i+2} >$ $(0 \leq i \leq 2l-3)$ 上是线性的；

(iii)　当 $i \geq 2l-2$ 且 $x \in \langle r_i, r_{i+2})\rangle$ 时，定义 $f(x) = F\big|_{\langle r_{i-2l+2}, r_{i-2l+4}\rangle} \circ f\big|^{-1}_{\langle r_{i-2l+2}, r_{i-2l+4}\rangle} \circ \cdots \circ f\big|^{-1}_{\langle r_{i-2}, r_i\rangle} \circ f\big|^{-1}_{\langle r_{i-1}, r_{i+1}\rangle}$．由上述构造知 $f(x)$ 满足定理的要求

(2)　若 $s = t = p$，仿照情形(1)在 $[a,p) \cup (p,b]$ 上构造 $f(x)$，再令 $f(p) = p$，同样可证明这样的 $f(x)$ 也符合定理的要求　□

4　主要结论及证明

下面给出本文的主要结论

定理5　设 k 段单调连续自映射 $F(x) \in G^0(I)$，满足条件(A)，$a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} = a$ 是 $F(x)$ 的极值点，$[a,1]$ 是 $F(x)$ 的特征区间，$a_0 = 0$，$a_k = 1$．

(1)　若 k 是偶数且 $F\big|_{[a,1]}$ 严格递减(或 k 是奇数且 $F\big|_{[a,1]}$ 严格递增)，则 $F(x)$ 无 k 阶迭代根

(2)　若 k 是偶数且 $F\big|_{[a,1]}$ 严格递增，则 $F(x)$ 有 k 阶迭代根的充要条件是：$F\big|_{[a,1]}$ 是个反序函数且 $F(0) = 1 > F(a_2) > \cdots > F(a_{k-2}) > F(1) > F(a_{k-1}) > \cdots > F(a_1) > a_{k-1}$．

(3)　若 k 是奇数且 $F\big|_{[a,1]}$ 严格递减，则 $F(x)$ 有 k 阶迭代根的充要条件是：$F(0) = 1 > F(a_2) > \cdots > F(a_{k-1}) > F(1) > F(a_{k-2}) > \cdots > F(a_3) > F(a_1) > a_{k-1}$．

证明　(1) 只考虑 k 是偶数且 $F\big|_{[a,1]}$ 是严格递减的情形，这时，若 $F(x)$ 有 k 阶迭代根 $f(x)$，那么，由引理2知 $f\big|_{[a,1]} \in G^0([a,1])$，$f\big|_{[a,1]}$ 严格单调且 $f\big|^k_{[a,1]} = F\big|_{[a,1]}$，从而 $F\big|_{[a,1]}$ 是严格递增的，这与已知矛盾　同理可证另一种情形

(2)　设 k 是偶数且 $F\big|_{[a,1]}$ 是严格递增的

如果 $F(x)$ 有 k 阶迭代根 $f(x)$，那么由定理2知 $f(x)$ 是以 a 为顶点的单峰自映射，由引理2有 $f\big|_{[a,1]} \in G^0([a,1])$ 且 $f\big|^k_{[a,1]} = F\big|_{[a,1]}$，根据文献[1]定理5知 $F\big|_{[a,1]}$ 是个反序函数　从引理1可知 $S(F) = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1}\{x \in (0,a] \cdot f^i(x) = a\}$，结合推论1，我们得到 $f^{k-2}(a_1) = f^{k-3}(a_2) = \cdots f(a_{k-2}) = a$，$a_1 \leq f(0) < f(a_1)$，因 $F(x)$ 满足条件(A)，从而 $f(a) = 1$ 且 $f(1) = a$ 是不可能的　假如 $a \leq f(1) < f(a) < 1$，则会推出 $F(0) = f(f^{k-1}(0)) \in f([a,1)) \subset (a,1)$，同时也会有 $F(a_i) = f^{i+1}(a)\ (1 \leq i \leq k-1)$ 及 $F(1)$ 在$(a,1)$内，这跟 $F(x)$ 满足条件(A)矛盾　从而只能有 $a < f(1) < f(a) = 1$，由于当 $1 \leq i \leq k$ 时，$F(a_i) = f^i(1)$，所以 $1 > F(a_2) >$

$\cdots > F(a_{k-2}) > F(1) > F(a_{k-1}) > \cdots > \cdots > F(a_3) > F(a_1) > a$，由于 $F(x)$ 满足条件 (A)，所以 $F(0) = 1$.

反之，如果 $F|_{[a,1]}$ 是个反序函数且 $1 = F(0) > F(a_2) > \cdots > F(a_{k-2}) > F(1) > F(a_{k-1}) > \cdots > F(a_3) > F(a_1) > a_{k-1}$，令 $r_{i+1} = F(a_i)$，$0 \leq i \leq k$，$r_0 = a_{k-1}$，由定理3知存在严格递减函数 $\bar{f}(x) \in G^0[a,1]$，使 $\bar{f}^k(x) = F|_{[a,1]}$ 且 $\bar{f}(r_i) = r_{i+1}$，$0 \leq i \leq k$. 现定义 $f(x)$ 如下:

(i) 当 $x \in [a_{i-1}, 1]$ 时，$f(x) = \bar{f}(x)$；

(ii) 当 $1 \leq i \leq k-1$ 且 $x \in [a_{i-1}, a_i]$ 时，定义 $f(x) = f|^{-1}_{[a_i, a_{i+1}]} \circ \cdots \circ f|^{-1}_{[a_{k-2}, a_{k-1}]} \circ (\bar{f}^{-1})^i \circ F|_{[a_{i-1}, a_i]}$. 由于 $f(x)$ 的构造可知 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的 k 阶迭代根

(3) 的必要性的证明与 (2) 的必要性的证明类似；但充分性的证明中 $f(x)$ 的构造要用到定理4，其中其余的证明与 (2) 的充分性的证明类似，这里不再详述 □

由对称性容易推得

定理6 设 I 上的 k 段单调连续自映射 $F(x)$ 满足条件 (A)，$a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1}$ 是它的极值点，$[0, a_1]$ 是其特征区间，那么

(1) 若 k 是偶数且 $F|_{[0,a_1]}$ 严格递减或 k 是奇数且 $F|_{[0,a_1]}$ 严格递增，则 $F(x)$ 无 k 阶迭代根

(2) 若 k 是偶数且 $F|_{[0,a_1]}$ 严格递增，则 $F(x)$ 有 k 阶迭代根的充要条件是：$F|_{[0,a_1]}$ 是个反序函数且 $0 = F(1) < F(a_{k-2}) < F(a_{k-4}) < \cdots < F(a_2) < F(0) < F(a_1) < \cdots < F(a_{k-1}) < a_1$.

(3) 若 k 是奇数且 $F|_{[0,a_1]}$ 严格递减，则 $F(x)$ 有 k 阶迭代根的充要条件是:

$$0 = F(1) < F(a_{k-2}) < \cdots < F(a_1) < F(0) < F(a_2) < \cdots < F(a_{k-1}) < a_1.$$ □

与迭代根有关的近期文章可参见[2, 3].

参 考 文 献

1 张景中、杨路. 论逐段单调连续函数的迭代根. 数学学报, 1983, **26**(4): 398- 412

2 Rice R E et al. When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$?. Amer. Math. Monthly, 1980, **87**: 252- 263

3 麦结华. 园周上自同胚有 N 阶迭代根的条件. 数学学报, 1987, **30**(2): 280- 283

The k-th Iterative Solutions of k-piece Monotone Continuous Self-mapping on the Interval

Sun Taixiang   Xi Hongjian

(Dept. of Math., Guangxi University, Nanning 530004)

Abstract

In this paper, we obtain necessary and sufficient condition of that k-piece monotone continuous self-mapping on the interval has the k-th iterative Solutions.

Keywords k-piece monotone continuous self-mapping, unimodal self-mapping, anti-unimodal self-mapping, reverse-order function, iterative solution, characteristic interval