第18卷第4期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 18 No. 4
1998年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1998

一个反应扩散方程解的熄灭行为*

陈　松　林

(华东冶金学院, 安徽马鞍山243002)

摘　要　本文应用上下解方法和 L^p 积分模估计的方法研究了一类反应扩散方程初边值问题正解的熄灭形为, 给出解熄灭的参数环境

关键词　反应扩散方程, L^p 积分模, 上下解, 熄灭

分类号　AMS(1991) 53K55/CCL O175.29

应用上下解和 L^p 积分模估计的方法来研究反应扩散问题解的渐近性已有大量的结果[1-5,8,9]. 对方程 $u_t - \Delta u = u^p$ 的初边值问题, H. Fujita[1]和 F. B. Weissler[2]分别讨论了其古典解和 $L^m(\mathbf{R}^n)$ 广义解, Y. Giga[3]对解的 Blow-up 性质作了深入的讨论, 文[4]给出其解熄灭的充要条件. 关于方程 $u_t - \Delta u = u^p - u^q - u$ 的 Cauchy 问题, 王明新[5]借助于初边值问题研究了其广义解的整体存在性、渐近性和 Blow-up. 本文将运用 L^p 积分模和上下解方法研究初边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^p - u^q - u & (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega\times(0,+\infty)} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

解的熄灭行形为. 这里 p, q 为正常数, Ω 为有界域.

定理1　设 $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $1 < k < p+1$, 则问题(1)的解 $u = u(x,t)$ 在有限时间 T 熄灭(定义见[4]), 且有如下指数型衰减估计

$$\|u(\cdot,t)\|_2 \leq \beta e^{-\alpha t} \quad t \in [0, T_0),$$

$$\|u(\cdot,t)\|_2 \leq \left[\left(\|u(\cdot,t)\|_2^{\frac{2-k}{2}} + \frac{m}{2}\right)e^{-(t-T_0)} - \frac{m}{2}\right]^{\frac{2}{2-k}}, \quad t \in [T_0, T),$$

$$\|u(\cdot,t)\|_2 = 0, \quad t \in [T, +\infty),$$

这里 $k, \beta, \alpha, T_0, T, m$ 均为与 u 无关的正常数, 其值在定理的证明过程中确定.

先给出两个引理.

引理1　设 $1 < k < p+1$, a, b 为某给定正常数, $y = y(t)$ 为方程

$$\begin{cases} y' = -ay^{\frac{k}{2}} - y + by^{\frac{p+1}{2}}, & t > 0, \\ y(0) = y_0 \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

* 1995年11月6日收到. 冶金工业部基础科学基金资助项目.

的解, 则存在 $\alpha > 1$, $\beta > 0$, 使如下估计式成立 $0 \le y(t) \le \beta e^{-\alpha t}$, $t \ge 0$.

证明 首先通过选取合适的 α, β 使 $\beta e^{-\alpha t}$ 为(2)的上解, 事实上要使

$$-\alpha\beta e^{-\alpha t} \le -a(\beta e^{-\alpha t})^{\frac{k}{2}} - \beta e^{-\alpha t} + b(\beta e^{-\alpha t})^{\frac{p+1}{2}},$$

或

$$(1-\alpha)\beta^{\frac{2-k}{2}} e^{-\alpha t} \le -a(1-\frac{b}{a}\beta^{\frac{p+1-k}{2}})e^{-\frac{k\alpha}{2}t},$$

只须选取 $\alpha > 1$ 和 β 充分大, 上式即可满足, 0为下解是显然的, 由比较定理引理1得证

引理2 设 $y(t) \ge 0$ 满足下述不等式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + my^{\frac{k}{2}} + y \le 0, \quad t \in (T_0, +\infty), \\ y(T_0) = y_{T_0}, \end{cases} \tag{3}$$

则有下述估计

$$y(t) \le [(y(T_0)^{\frac{2-k}{2}} + \frac{m}{2})e^{-(t-T_0)} - \frac{m}{2}]^{\frac{2}{2-k}}, \quad t \in [T_0, T),$$

$$y(t) = 0, \quad t \in [T, +\infty).$$

证明 用Bernoulli方程

$$\frac{dy}{dt} + my^{\frac{k}{2}} + y = 0,$$

$$y(T_0) = y_{T_0}$$

的解 $y = y(t)$ 和 $y = 0$ 分别构成(3)的上、下解. 通过解上述Bernoulli方程证得引理

定理1的证明 用 $u(x, t)$ 乘方程(1)的两边后在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|u\|_{q+1}^{q+1} + \|u\|_2^2 = 0, \tag{4}$$

这里 $\|u\|_l = \|u(\cdot, t)\|_l$ 表 $L^l(\Omega)$ 空间中的范数. 应用Gagliardo-Nirenberg不等式[6]知存在常数 c, 使

$$\|u\|_2 \le c\|u\|_{1+q}^{1-\theta} \cdot \|\nabla u\|_2^{\theta}, \tag{5}$$

其中 $\theta = [N(1-q)]/[N(1-q)+2(1+q)]$, N 为 Ω 的空间维数. 若取 $k = [2N(1-q)+4(1+q)]/[N(1-q)+4]$, 对(5)式应用内插不等式[7]知对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $c_\epsilon > 0$, 使

$$\|u\|_2^k \le c_\epsilon\|u\|_{1+q}^{1+q} + \epsilon\|\nabla u\|_2^2. \tag{6}$$

又对 $\|u\|_{p+1}^{p+1}$ 应用Hölder不等式的简单推广(参见[7]p146)

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \le |\Omega|^{\frac{1-p}{2}}\|u\|_2^{p+1}, \tag{7}$$

这里 $|\Omega|$ 表 Ω 的模. 考虑到(6), (7)式知存在常数 a, b, 使(4)式成为

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\|u\|_2^2 \le -a\|u\|_2^k - \|u\|_2^2 + b\|u\|_2^{p+1}, \\ \|u(\cdot, 0)\|_2^2 = \|u_0(x)\|_2^2. \end{cases} \tag{8}$$

由引理1知存在 $\alpha > 1$, β 充分大, 使下式成立

$$0 \le \|u\|_2 \le \beta e^{-\alpha t}, \quad t \ge 0. \tag{9}$$

又由(8)式, 记 $y = \|u\|_2^2$, 有

$$\frac{dy}{dt} \leq - ay^{\frac{k}{2}} - y + by^{\frac{p+1}{2}} = - ay^{\frac{k}{2}}\left(1 - \frac{b}{a} y^{\frac{p+1-k}{2}}\right) - y, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

由(9)式知, 存在 T_0, 使

$$1 - \frac{b}{a} \|u\|_2^{p+1-k} \geq 1 - \frac{b}{a} (\beta e^{-\alpha T_0})^{p+1-k} \equiv \lambda > 0, \quad t \in [T_0, +\infty).$$

此时(10)式变成

$$\frac{dy}{dt} \leq - \lambda a y^{\frac{k}{2}} - y, \quad t \in [T_0, +\infty), \tag{11}$$

$$y(T_0) = y_{T_0}.$$

对(11)式, 取 $\lambda a = m$, 应用引理2即得证本定理

定理2 对方程(1), 若 $1 < q < p$, 则其解不熄灭, 且有估计

$$\|u(\cdot, t)\|_2 \geq c\exp(-\rho^{1-q} t), \quad t > T_1, \tag{12}$$

这里 c, ρ, T_1 在证明过程中选取

证明 首先作变换

$$v(x, s) = \rho e^s \cdot u(x, \rho^{q-1} s), \quad s = \rho^{-(q-1)} t,$$

ρ 为待定正常数 此时(1)化为

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \rho^{q-1} \Delta v - e^{-(p-1)s} \rho^{q-p} v^p + e^{-(q-1)s} v^q + \rho^{q-1} v - v = 0, \tag{1'}$$

$$v(x, s)\big|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = 0,$$

$$v(x, 0) = \rho u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

用 v 和 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 分别乘(1')中方程的两边后对 x 积分得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v\|_2^2 + \rho^{q-1}\|\nabla v\|_2^2 - \rho^{q-p} e^{-(p-1)s}\|v\|_{p+1}^{p+1}$$

$$+ e^{-(q-1)s}\|v\|_{q+1}^{q+1} + (\rho^{q-1} - 1)\|v\|_2^2 = 0 \tag{13}$$

及

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial s}\right\|_2^2 + \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\rho^{q-1}\|\nabla v\|_2^2 - \rho^{q-p}\frac{1}{p+1}e^{-(p-1)s}\|v\|_{p+1}^{p+1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{q+1}e^{-(q-1)s}\|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{\rho^{q-1}-1}{2}\|v\|_2^2\right]$$

$$\leq - \frac{q-1}{q+1}e^{-(q-1)s}\|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{p-1}{p+1}\rho^{q-p}e^{-(p-1)s}\|v\|_{p+1}^{p+1} \leq 0 \quad (\text{当 } s > s_1 \text{时}). \tag{14}$$

由(14)式有

$$\frac{1}{2}\rho^{q-1}\|\nabla v\|_2^2 - \rho^{q-p}\frac{1}{p+1}e^{-(p-1)s}\|v\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{q+1}e^{-(q-1)s}\|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{\rho^{q-1}-1}{2}\|v\|_2^2$$

$$\leq \rho^{q+1}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{q+1}\|u_0\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}\|u_0\|_{p+1}^{p+1}\right) + \frac{\rho^{q-1}-1}{2}\|v\|_2^2 \equiv E_0.$$

若再取 ρ 充分小, 可使 $E_0 < 0$.

将这些结果代入(13)式得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v\|_2^2 + \frac{1-q}{2}\rho^{q-1}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{p-q}{p+1}\rho^{q-p}e^{-(p-1)s}\|v\|_{1+p}^{1+p} + \frac{q-1}{2}(1-\rho^{q-1})\|v\|_2^2$$

$$\geq - (q+1)E_0.$$

从而由定理所给条件有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v\|_2^2+\frac{q-1}{2}(1-\rho^{q-1})\|v\|_2^2\geq-(q+1)E. \tag{15}$$

由(15)式知, 存在 $s_0>s_1$, $c>0$, 使 $\|v\|_2^2\geq c$, 回代变换后即知(12)式成立. 证毕

感谢导师莫嘉琪教授的鼓励和帮助.

参 考 文 献

1 Fujata H. *On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations*. Proc. Symp. Pure Math., 18, Part 1, Amer. Math. Soc., 1968, 138- 161

2 Weissler F B. *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p*. Indiana Univ. Math. J., 1980, **29**(1)): 79- 102

3 Giga Y and Kohn R V. *Nondegeneracy of blow up for semilinear heat equations*. Comm. Pure Appl. Math., 1989, **42**: 845- 884

4 顾永耕. 抛物型方程的解熄灭的充要条件. 数学学报, 1994, **37**(1): 73—79

5 王明新. 一个反应扩散方程的门槛结果. 数学学报, 1994, **37**(6): 735- 743

6 Vladimir G. Marja, *Sobolev Spaces*, Spring-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

7 D. 吉耳巴格, N. S. 塔丁格. 二阶椭圆型偏微分方程(中译本). 上海科学技术出版社, 1981.

8 林宗池. 极限方程是退缩椭圆型方程的三阶偏微分方程的奇摄动. 数学学报, 1992, **35**(2): 257- 261

9 陈松林. 一类生化反应扩散方程组解的渐近性态. 生物数学学报, 1995, **10**(4): 134- 137

The Extinction Behavior of Solutions for a Reaction Diffusion Equation

Chen Songlin

(East China Institute of Metallurgy, Anhui, Maanshan 243002)

Abstract

In this paper we obtain a necessary and a sufficient conditions of extinction of solutions for a reaction diffusion equations by using sub- and super-solution methods and L^p-integal model estimation methods.

Keywords reaction diffusion equation, L^p-integal model, sub- and super-solution, extinction.