具有三次曲线解 $xy^2+y=x^3$ 的中心对称三次系统极限环的存在性*

谭继智　　沈伯骞

(大连大学数学系，116622)　(辽宁师范大学数学系，大连116029)

摘　要　本文证明了具有三次曲线解 $xy^2+y=x^3$ 的中心对称三次系统的极限环存在，而且至少可以存在四个极限环，它们作 (2, 2) 分布. 从而纠正了文[1]的结论

关键词　极限环，三次曲线解，中心对称三次系统

分类号　AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

文[1]认为具有三次曲线解的中心对称三次系统不可能存在极限环，其实具有三次曲线解

$$xy^2+y=x^3 \tag{1}$$

的中心对称三次系统就会有极限环存在的可能性，而且至少可以存在四个.

先来证明以下定理

定理1　中心对称三次系统具有三次曲线解(1)的充要条件是此系统可化为以下形式

$$\begin{cases}\dot{x}=k_1(y+xy^2-x^3)+(k_3x+k_4y)(2xy+1)=P(x,y),\\ \dot{y}=k_2(y+xy^2-x^3)+(k_3x+k_4y)(3x^2-y^2)=Q(x,y).\end{cases} \tag{2}$$

证明　对称三次系统的一般形状为

$$\begin{cases}\dot{x}=a_{10}x+a_{01}y+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3,\\ \dot{y}=b_{10}x+b_{01}y+b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3.\end{cases} \tag{3}$$

设系统(3)有三次曲线解(1)，则有以下恒等式

$$\begin{aligned}&(y^2-3x^2)(a_{10}x+a_{01}y+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3)+\\ &(2xy+1)(b_{10}x+b_{01}y+b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3)\\ &\equiv(xy^2+y-x^3)(A_0+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2).\end{aligned}$$

比较系数得

$$a_{01}=A_{02}-b_{03},\ a_{30}=-A_{02},\ a_{21}=2a_{10},\ a_{12}=A_{02}-2b_{03},$$
$$a_{03}=0,\ b_{10}=0,\ b_{01}=A_0,\ b_{30}=-A_0+3a_{10},\ b_{21}=-3b_{03},\ b_{12}=A_0-a_{10}.$$

代入系统(3)得

$$\begin{cases}\dot{x}=a_{10}x+(A_{02}-b_{03})y-A_{02}x^3+2a_{10}x^2y+(A_{02}-2b_{03})xy^2,\\ \dot{y}=A_0y+(-A_0+3a_{10})x^3-3b_{03}x^2y+(A_0-a_{10})xy^2+b_{03}y^3.\end{cases}$$

* 1996年1月8日收到. 辽宁省自然科学基金资助

这里 $a_{10}, b_{03}, A_{02}, A_0$ 均为任意常数。经整理得

$$\begin{cases} \mathring{x} = A_{02}(y + xy^2 - x^3) + (a_{10}x - b_{03}y)(2xy + 1), \\ \mathring{y} = A_0(y + xy^2 - x^3) + (a_{10}x - b_{03}y)(3x^2 - y^2). \end{cases}$$

记 $A_{02} = k_1, A_0 = k_2, a_{10} = k_3, -b_{03} = k_4$，即得系统(2)，于是条件的必要性成立，条件的充分性是显然的。 □

现举反例，说明系统(2)是有存在极限环的可能的。为此不妨令 $M(1, -2)$ 成为系统(2)的奇点，其条件为

$$P(1, -2) = k_1 - 3k_3 + 6k_4 = 0, \tag{4}$$

$$Q(1, -2) = k_2 - k_3 + 2k_4 = 0. \tag{5}$$

再令系统(2)在点 $M(1, -2)$ 点处的散度为0，其条件为

$$(P_x(1, -2) + Q_y(1, -2)) = k_1 - 3k_2 - 3k_3 - k_4 = 0. \tag{6}$$

由(4)，(5)，(6)可解出 $k_1 = 21k_3, k_2 = 7k_3, k_4 = -3k_3$。代入系统(2)并约去右端因子 k_3 得

$$\begin{cases} \mathring{x} = 21(y + xy^2 - x^3) + (x - 3y)(2xy + 1), \\ \mathring{y} = 7(y + xy^2 - x^3) + (x - 3y)(3x^2 - y^2). \end{cases} \tag{7}$$

再继续研究系统(7)的奇点 $M(1, -2)$ 的性质。为此对系统(7)作变换 $x = x' + 1, y = y' - 2$ 得

$$\begin{cases} \mathring{x}' = -10x' - 40y' - 67x'^2 - 56x'y' + 15y'^2 - 21x'^3 + 2x'^2y' + 15x'y'^2, \\ \mathring{y}' = 48x' + 10y' + 6x'^2 - 42x'y' - 12y'^2 - 4x'^3 - 9x'^2y' + 6x'y'^2 + 3y'^3. \end{cases}$$

对此系统继续作变换 $x' = 40x'', y' = -10x'' + \sqrt{1820}y''$ 得

$$\begin{cases} \mathring{x}'' = -\sqrt{1820}y'' - 2082.5x''^2 - 63.5\sqrt{1820}x''y'' + 682.5y''^2 - \\ \qquad 32900x''^3 + 50\sqrt{1820}x''^2y'' + 27300x''y''^2, \\ \mathring{y}'' = \sqrt{1820}x'' + \dfrac{4375}{\sqrt{1820}}x''^2 - 2075x''y'' - \dfrac{15015}{\sqrt{1820}}y''^2 - \dfrac{420000}{\sqrt{1820}}x''^3 - \\ \qquad 17800x''^2y'' + \dfrac{546000}{\sqrt{1820}}x''y''^2 + 5460y''^3. \end{cases} \tag{8}$$

按文[2]中计算一阶焦点量 P_4 的公式

$$P_4 = \frac{1}{8}\{3(F_{30} + G_{03}) + F_{12} + G_{21} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}[F_{11}(F_{20} + F_{02}) - G_{11}(G_{20} + G_{02}) + \\ 2(F_{02}G_{02} - F_{20}G_{20})]\}$$

来计算系统(8)的原点的一阶焦点量，其中 F_{ij}, G_{ij} 分别表示系统(8)中第一和第二方程中 x^iy^j 的系数，$\sqrt{\Delta}$ 表示系统(8)的一次项系数的绝对值。于是

$$8P_4 = 3(-32900 + 5460) + 27300 - 17800 + \\ \frac{1}{\sqrt{1820}}[-63.5\sqrt{1820}(-2082.5 + 682.5) + 2075(\frac{4375}{\sqrt{1820}} - \frac{15015}{\sqrt{1820}}) + \\ 2(-\frac{15015}{\sqrt{1820}} \times 682.5 + \frac{4375}{\sqrt{1820}} \times 2082.5)] \approx 2700 > 0.$$

所以系统(8)的原点是一阶不稳定细焦点。也就是说系统(7)的奇点 $M(1, -2)$ 是一阶不稳定细焦点。当 $0 < \epsilon \ll 1$ 时对系统(7)作如下的微扰

$$\begin{cases} \mathring{x} = 21(y + xy^2 - x^3) + [(1 + 6\epsilon)x - 3(1 - \epsilon)y](2xy + 1), \\ \mathring{y} = 7(y + xy^2 - x^3) + [(1 + 6\epsilon)x - 3(1 - \epsilon)y](3x^2 - y^2). \end{cases} \tag{9}$$

点 $M(1,-2)$ 仍然保持为系统(9)的奇点, 而这时点 M 处的散度 $\operatorname{div} M(1,-2) = -21\epsilon < 0$.
所以点 $M(1,-2)$ 由系统(7)的一阶不稳定细焦点变成了系统(9)的稳定粗焦点 因此系统(9)在点 $M(1,-2)$ 外围附近跳出了一个不稳定极限环.

下面描绘系统(9)的全局相圈 先找系统(9)的有限远奇点, 易知系统(7)有七个有限远奇点, 它们分别是

$$O(0,0),\ A\left(\frac{3}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{24}}\right),\ A'\left(\frac{-3}{\sqrt{24}}, \frac{-1}{\sqrt{24}}\right),$$

$$B\left(\sqrt{\frac{-112+40\sqrt{10}}{128}}, \frac{7-2\sqrt{10}}{9}\cdot\sqrt{\frac{-112+40\sqrt{10}}{128}}\right),$$

$$B'\left(-\sqrt{\frac{-112+40\sqrt{10}}{128}}, -\frac{7-2\sqrt{10}}{9}\cdot\sqrt{\frac{-112+40\sqrt{10}}{128}}\right),$$

$$M(1,-2),\ M'(-1,2).$$

其中 O 是不稳定结点; A', A 是稳定结点; B, B' 是鞍点; M, M' 是一阶不稳定细焦点 经微扰成系统(9)后, M, M' 变成稳定粗焦点, 其他奇点均保持原有性质 其坐标除 O, M, M' 保持不变外, 余均有微小变动 再考虑系统(9)的无穷远奇点 为此对系统(9)作变换 $x = \frac{v}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ 得

$$\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{1}{z^2}[-3(1-\epsilon)z - (6-6\epsilon)zv - 7z^3 + 9(1-\epsilon)zv^2 + (4-18\epsilon)v^3 z] \\ \dot{v} = \dfrac{1}{z^2}[(12+9\epsilon)v + (18+2\epsilon)z^2 - (4-18\epsilon)v^2 - (12+9\epsilon)v^3 + \\ \qquad (4-18\epsilon)v^4 - (6-6\epsilon)z^2 v], \end{cases}$$

可知系统(9)有四个无限远奇点, 它们是 $P(0,1,0)$, $Q(1,1,0)$, $R(-1,1,0)$, $S\left(\frac{12+9\epsilon}{4-18\epsilon}, 1, 0\right)$, 且易知 P 是鞍点, Q 是鞍点, R 是鞍点, S 是不稳定结点 不难得知系统(9)的全局相同如图1所示 这时在点 M, M' 外围分别存在一个无穷大分界线环 在图1中, 曲线 PR, $P'R'$ 和 QOQ' 是三次曲线(1)的图象 再考虑这两个无穷大分界线环内侧的稳定性 因鞍点 $P(0,1,0)$ 点处的两个特征根为 $\lambda_P^1 = -3(1-\epsilon)$, $\lambda_P^2 = 12+9\epsilon$ 鞍点 $R(-1,1,0)$ 处的两个特征根为 $\lambda_R^1 = 8+6\epsilon$, $\lambda_R^2 = -32+18\epsilon$, 根据文[3]计算含有多个鞍点的分界线环内侧稳定性的方法计算

$$\left|\frac{\lambda_P^1}{\lambda_P^2}\right|\cdot\left|\frac{\lambda_R^2}{\lambda_R^1}\right| = \left|\frac{-3(1-\epsilon)}{12+9\epsilon}\right|\cdot\left|\frac{-32+18\epsilon}{8+6\epsilon}\right|$$

$$= \frac{16-25\epsilon+9\epsilon^2}{16+24\epsilon+9\epsilon^2} < 1$$

所以点 $M(1,-2)$ 外围的无穷分界线环的内侧为不稳定(参看文[3]). 由于系统(9)在 M 点外围附近存在一个不稳定极限环, 所以在此不稳定极限环外围必然还至少存在着一个稳定极限环 所以系统(9)至少存在四个极限环 同时还存在两无穷大分界线环, 它们作关于原点的中心对称, 如图1所示 所以文[1]认为具有三次曲线解的中心对称三次系统不可能存在极限环的结论是不能成立的

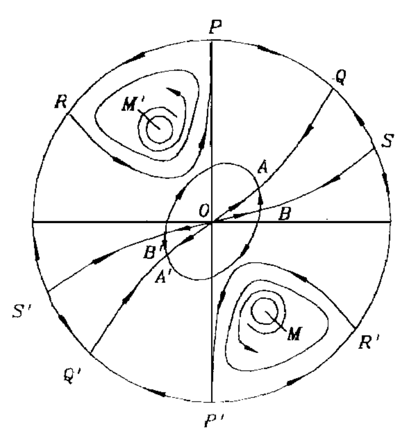

图1

参　考　文　献

1 **Лавринович Л С. Об одном классе дифференциальных уравнений с предельным циклом. Диф. Урав.**, 1974, **5** (11): 2077- 2078

2 Göbber F, Willamowski K D. *Liapunow approach to multiple Hopf bifurcation*. Jour. of Math. Anal. and Appl., 1979, **71**: 333- 350

3 **叶彦谦等. 极限环论. 上海科学技术出版社**, 1984, 70

The Existence of Limit Cycles for a Central Symmetry Cubic System with a Cubic Curve Solution $xy^2 + y = x^3$

Tan Jizhi

(Dept. of Math., Dalian University, 116622)

Shen Boqian

(Dept. of Math., Liaoning Normal University, Dalian 116029)

Abstract

In this paper, we prove that there exist at least four the limit cycles distributing in the form (2, 2) in a central symmetry cubic system with a cubic curve solution $xy^2 + y = x^3$. Then we corrected an error in [1].

Keywords limit cycle, cubic curve solution, central symmetry cubic system.