第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

非线性广义加权逼近*

杨 文 善
(浙江师范大学，金华 321004)

摘 要 本文对一类"几乎最大"的集族分别给出广义权函数最佳逼近的Koimogorov 型和交错型特征定理.

关键词 非线性广义权函数逼近，特征.
分类号 AMS(1991) 41A50/CCL O174.41

1 引 言

本文讨论由 Moursund[1,2]和 Taylor[3]研究的广义权函数逼近的非线性问题. 设 R 是实数集，X 是紧 Hausdorff 空间，$W(x,y)$是定义在 $X\times R$ 上的实函数，称 $W(x,y)$是广义权函数，如果

i) $W(x,y)\geqslant 0.\ \forall\ (x,y)\in X\times R$;

ii) $W(x,y)$在 $X\times R$ 上连续;

iii) 存在 X 上的两个有界函数 $y^+(x)$ 和 $y^-(x)$，满足 $y^-(x)\leqslant y^+(x),\forall\ x\in X$；且 $W(x,y)$ 在$(-\infty,y^-(x)$ 上是 y 的严格下降函数，而在$(y^+(x),+\infty)$ 上是 y 的严格升函数；在$[y^-(x),y^+(x)]$ 上，$W(x,y)=W^+(x)=\inf\limits_{y} W(x,y)$.

令 $C(X)$表示定义在 X 上的实连续函数全体，$G\subset C(X)$，$f\in C(X)$，若 $g\in G$ 满足:

$$\|f-g\|_W=\inf\{\|f-h\|_W,h\in G\},$$

则称 g 是 f 关于权函数 W 的最佳逼近，其全体记为 $P_G^W(f)$. 其中

$$\|f-g\|_W=\sup_{X\in x}W(x,(f-g)(x)).$$

在本文的第2和第3节中，对一类"几乎最大"的集族分别给出广义权函数最佳逼近的 Kolmogorov 型和交错型特征定理，在第4节中，给出了一些应用.

2 Kolmogorov 型特征

对 $g\in G,f\in C(x)$，定义

$$X_{f-g}^W=\{x\in X:W(x,(f-g)(x))=\|f-g\|_w\},$$

* 1996年1月10日收到.
国家自然科学基金和浙江省自然科学基金资助项目.

$$\sigma_{f-g}(x)=\begin{cases}1, & g^{+}(x)<(f-g)(x),\\ 0, & y^{-}(x)\leqslant(f-g)(x)\leqslant g^{+}(x), \quad \forall x\in X,\\ -1, & y^{-}(x)>(f-g)(x).\end{cases}$$

引理 1 G 是 $C(X)$ 的任何子集，$g\in G$，若对 $\forall h\in G$.

$$\max\{(g-h)(x)\sigma_{f-g}(x): x\in X^{W}_{f-g}\}\geqslant 0, \tag{1}$$

则 $g\in P^{W}_{G}(f)$.

证明 对 $\forall h\in G$，存在 $x_0\in X^0\in X^{W}_{f-g}$ 使

$$\sigma_{f-g}(x_0)(g-h)(x_0)\geqslant 0,$$

若 $\sigma_{f-g}(x_0)=0$，则

$$\| f-g \|_W=W(x_0,(f-g)(x_0))=W^{*}(x_0)\leqslant W(x_0,(f-g)(x_0)),$$

故

$$\| f-g \|_W=\leqslant \| f-h \|_W;$$

若 $\sigma_{f-g}\neq 0$，无妨可设 $\sigma_{f-g}(x_0)>0$，($\sigma_{f-g}(x_0)<0$(可类似证明)则

$$f(x_0)-g(x_0)>y^{+}(x_0),$$

且 $g(x_0)\geqslant h(x_0)$ 所以

$$f(x_0)-h(x_0)\geqslant f(x_0)-g(x_0)>y^{+}(x_0).$$

再由条件 iii)，知

$$\| f-g \|_W=W(x_0,(f-g)(x_0))\leqslant W(x_0,(f-h)(x_0)),$$

所以

$$\| f-g \|_W\leqslant \| f-h \|_W.$$

由 $h\in G$ 的任意性知

$$g\in P^{W}_{G}(f).$$

□

注 1 由上所证可知，若对 $\forall h\in G$ 有

$$\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x): x\in X^{W}_{f-g}\}>0, \tag{2}$$

则 $P^{W}_{G}(f)=\{g\}$.

定义 1 称 $C(x)$ 的子集 G 具有弱中间性质，如果对 G 中的任何两个不同的元 g 和 h，及 X 的任一非空闭子集 D，若

$$\min\{|(g-h)(x)|: x\in D\}>0,$$

则存在 $\{g_n\}\subset G$，使 $\lim g_n=g$ 且

$$\min\{(g-g_n)(x)(g_n-h)(x): x\in D\}>0 \quad \forall n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

定理 1 设 G 有弱中间性质，$g\in G$，则

$$g\in P^{W}_{G}(f)\Leftrightarrow \max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x): x\in X^{W}_{f-g}\}\geqslant 0.\ \forall h\in G.$$

证明 充分性由引理 1 给出，下证必要性：

反设存在 $h\in G$ 使

$$\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x): x\in X^{W}_{f-g}\}=-\varepsilon<0,$$

因 $W(x,y)$ 连续，故 $y^{+}(x)$，$y^{-}(x)$ 分别是上、下半连续，从而 σ_{f-g} 在 X^{W}_{f-g} 的一个邻域连续，故存在开子集 $\mathrm{U}\supset X^{W}_{f-g}$ 使

$$\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x): x\in \overline{U}\}\leqslant -\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 G 的弱中间性质，存在 $\{g_n\}\subset G$，使 $\lim_n g_n = g$ 且

$$\min\{(g-g_n)(x)(g_n-h)(x): x\in \overline{U}\}>0 \quad n=1,2,\cdots.$$

从而对充分大的 n，有

$$\sigma_{f-g}(x)(g_n-g)(x)>0, \quad \forall\, x\in \overline{U},$$

且 $\sigma_{f-g_n}(x)=\sigma_{f-g}(x)$，$\forall\, x\in\overline{U}$. 这样类似于引理 1 的证明易得

$$\sup_{x\in\overline{U}} W(x.(f-g_n)(x))<\| f-g\|_W,$$

对充分大的 n 成立. 因

$$\sup_{x\in x\setminus U} W(x.(f-g)(x))<\| f-g\|_W,$$

故对充分大的 n 有

$$\sup_{x\in x\setminus U} W(x.(f-g_n)(x))<\| f-g\|_W,$$

所以，当 n 充分大时有

$$\| f-g_n\|_w<\| f-g\|_W.$$

与 $g\in P_G^W(f)$ 矛盾. □

定义 2 $C(X)$ 的子集 G 称为 W-Kolmogorov 集，如果对 $\forall\, F\in C(X)$，$G\in G$，$g\in P_G^W(f)\Leftrightarrow \forall\, h\in G$，条件(1)成立.

引理 2 设对任何正整数 k，kG 都是 W-Kolmogorov 集. 则 $\forall\, f\in C(X)$，$g\in G$，

$$g\in P_G^W(f)\Leftrightarrow g\in P_G^{W_k}(f_k),$$

其中 $f_k=\frac{1}{k}f+(1-\frac{1}{k})g$. $W_k(x,y)=W(x,ky)$. $\forall\,(x,y)\in X\times R$.

证明 因为

$$f_k-g=\frac{1}{k}(f-g);\sigma_{f_k-g}(x)=\sigma_{f-g}(x),$$

$$W_k(x,(f_k-g)(x))=W(x,(f-g)(x)),$$

故 $X_{f_k-g}^W=X_{f-g}^W$. 又因为 G，kG 均是 W-Kolmogorov 集，故 G 是 W_k-Kolmogorov 集，从而

$$g\in P_G^W(f)\Leftrightarrow \forall\, h\in G,$$

$$\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x): x\in X_{f-g}^W\}\geqslant 0,$$

$$\Leftrightarrow \max\{\sigma_{f_k-g}(x)(g-h)(x): x\in X_{f-g}^{W_k}\}\geqslant 0,$$

$$\Leftrightarrow g\in P_g^{W_k}(f_k).$$ □

定理 2 设 $W(x,y)$ 满足条件

iv) 存在 $r>0$ 使对 $\forall\, y\in R$，$x\in X$

$$|y|\leqslant rW(x,y),$$

G 是 $C(X)$ 的子集，则下述论断等价

1) G 具有弱中间性质.

2) 对任何正整数 k，kG 是 W-Kolmogorov 集.

证明 1)⇒2) 由定理 1 可得. 下证 2)⇒1)

设 $g\neq h$ 是 G 中的任何两个元，$D\subset X$ 是非空闭子集，且

$$a=\min\{|h(x)-g(x)|:x\in D\}>0.$$

定义

$$D_a^+=\{x\in X:h(x)-g(x)>\frac{a}{2}\};$$

$$D_a^-=\{x\in X:h(x)-g(x)<-\frac{a}{2}\};$$

$$D_a=D_a^+\cup D_a^-,$$

则 $D_a^+\cap D_a^-=\varphi$, 且 $D\cap D_a^+$, $D\cap D_a^-$ 均闭, 对 $\forall\, x\in X$, 令 $W_+^{-1}(x,y)$ 和 $W_-^{-1}(x,y)$ 分别表示 $W(x,y)$ 在 $(y^+(x),+\infty)$ 和 $(-\infty,y^-(x))$ 上的反函数, 取 m 和 M, 满足

$$\max_{x\in x}W^*(x)<m<M.$$

定义

$$S_0(x)=\begin{cases}W_+^{-1}(x,M), & \forall\, x\in D\cap D_a^+,\\ W_-^{-1}(x,M), & \forall\, x\in D\cap D_a^-,\\ W_+^{-1}(x,m), & \forall\, x\in X\backslash D_a,\end{cases}$$

则 $S_0(x)$ 在 $D\cap D_a^+$, $D\cap D_a^-$, $X\backslash D_a$ 上均是连续的. 事实上, 对 $\forall\, x_n\in D\cap D_a^+$, $x_n\to x_0\in D\cap D_a^+$, 记 $y_n=S_0(x_n)$, 则 $W(x_n,y_n)=M$. 由条件 iv) 知 $\{y_n\}$ 是有界的, 故可设 $y_n\to y_0$, 从而由 $W(x,y)$ 的连续性知, $W(x_0,y_0)=M$, 因 $y_n\in[y^+(x),+\infty)$, $M>\max\limits_{x\in x}W^*(x)$, 故 $y_0\in[y^+(x_0)+\infty)$, $y_0=W_+^{-1}(x_0,M)$, 即 $S_0(x)$ 在 $D\cap D_a^+$ 上是连续的. 类似可证 S_0 在 $D\cap D_a^-$, $X\backslash D_a$ 上也是连续的, 从而由 Tietze 扩张定理可将 S_0 延拓到 X 使 $S_0\in C(X)$. 令

$$S(x)=\begin{cases}\min\{S_0(x),W_+^{-1}(x,M)\}, & \forall\, x\in X\backslash D_a^+,\\ \max\{S_0(x).W_-^{-1}(x,M)\}, & \forall\, x\in X\backslash D_a^-,\end{cases}$$

则 $S\in C(X)$. 定义

$$f(x)=s(x)+g(x),\quad \forall\, x\in X,$$

则 $f\in C(X)$, 且对 $\forall\, x\in X$,

$$W(x,(f-g)(x))\leqslant\{W(x,W_+^{-1}(x,M)),\ \forall\, x\in x\backslash D_a^+ W(x,W_-^{-1}(x,M)),\ \forall\, x\in x\backslash D_a^-,$$

故

$$W(x,f-g)(x))\leqslant M,\quad \forall\, x\in X.$$

另一方面, $\forall\, x\in D$,

$$W(x,(f-g)(x))=M,$$

而 $\forall\, x\in X\backslash D_a$,

$$W(x,(f-g)(x))=m,$$

故

$$\|f-g\|_W=M,$$

且

$$D\subset X_{f-g}^W\subset D_a,$$

$$\sigma_{f-g}(x)=\operatorname{sign}(h-g)(x),\quad \forall\, x\in D_a.$$

从而

$$max\{\sigma_{f-g}(x),(g-h)(x):x\in X^W_{f-g}\}<0.$$

所以 $g\in P^W_G(f)$,由引理 2,$g\in P^{W_k}_G(f_k)$,$\forall\ k=1,2,\cdots$,因此,对$\forall\ k=1,2,\cdots$,存在 $g_k\in G$ 使

$$\|f_k-g_k\|_{W_k}<\|f_k-g\|_{W_k}.$$

因 $X^W_{f_k-g}=X^W_{f-g}$,故 $D\subset X^W_{f_k-g}$,从而

$$W_k(x,(f_k-g_k)(x))<W_k(x,(f_k-g)(x)).\ \forall\ x\in D.$$

显然,$\forall\ x\in D,(f_k-g)(x)\overline{\in}[y^-(x),y^+(x)]$,故

$$(f_k-g_k)(x)<(f_k-g)(x),\quad \forall\ x\in D\cap D^+_\sigma,$$

$$(f_k-g_k)(x)>(f_k-g)(x),\quad \forall\ x\in D\cap D^-_\sigma,$$

即:

$$\mathrm{sign}(g_k-g)(x)=\mathrm{sign}(h-g)(x),\quad \forall\ x\in D.$$

另一方面,对$\forall\ k=1,2,\cdots,\forall\ x\in X$

$$\begin{aligned}|(g_k-g)(x)|&\leqslant\frac{1}{k}[k|g_k-f_k|+k|f_k-g|]\\&\leqslant\frac{1}{k}[rw(x,k(f_k-g_k)(x))+rw(x,k(f_k-g)(x))]\\&=\frac{r}{k}[W_k(x,(f_k-g_k)(x))+W_k(x,(f_k-g)(x))]\\&\leqslant\frac{r}{k}[\|f_k-g_k\|_{w_k}+\|f_k-g\|_{w_k}]\\&\leqslant\frac{2}{k}r\|f-g\|_w,\end{aligned}$$

故$\lim\limits_k\|g_k-g\|=0$,由此得,当 n 充分大时,

$$\min\{(g-g_n)(x).(g_n-h)(x):x\in D\}>0,$$

即 G 有弱中间性质. □

注 G 是 $C(X)$中由所有广义有理函数组成的集合[4].由 G 是具有弱中间性质,从而由定理 1 可得广义权函数有理逼近的特征.

3 交错型特征

在本节,设 $X=[a,b]$.

定义 3[5] 称 $G\subset C[a,b]$在 $g\in G$ 处有次数为 n_g 的性质 Z,如果对$\forall\ h\in G,h-g$ 在$[a,b]$上至多有 n_g-1 个零或恒为零.

定义 4[5] 称 G 在 $g\in G$ 处有次数为 n 的性质 A,如果对任何给定的

i) 整数 $m,0\leqslant m<n_g$;

ii) 子集$\{x_1,\cdots,x_m\}:a=x_0<x_1<\cdots,x_m<x_{m+1}=b$;

iii) $\varepsilon:0<\varepsilon<\frac{1}{2}min\{x_{j+1}-x_j:j=0,1,\cdots,m\}$;

iv) 符号 $\sigma\in\{-1,1\}$,

存在 $h\in G$ 满足 $\|h-g\|<\varepsilon$ 且

$$\operatorname{sign}(h-g)(x)=\begin{cases}\sigma, & a\leqslant x\leqslant x_1-\varepsilon,\\ (-1)^i\sigma, & x_i+\varepsilon\leqslant x\leqslant x_{i+1}-\varepsilon, i=1,\cdots,m-1,\\ (-1)^m\sigma, & x_m+\varepsilon\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

定义 5[5] 若 G 在 $g\in G$ 处有次数为 n_g 的性质 A 和性质 Z,则称 G 在 g 处有次数. 如果 G 在 G 中的每个元 g 年均有次数,则称 G 有次数.

这一节的主要结果是:

定理 3 $C(X)$的子集 G 有次数的充要条件是 G 具有弱中间性质且对$\forall f\in C(X),g\in G$,若 $Z(\sigma_{f-g})^*=\varnothing$ $(Z(\sigma_{f-g})=\{x:\sigma_{f-g}(x)=0\})$,则下述四个论断等价

i) $g\in P_G^W(f)$.

ii) $\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x):x\in X_{f-g}^W\}\geqslant 0$, $\forall h\in G$.

iii) $\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x):x\in X_{f-g}^W\}>0$, $\forall h\in G\setminus\{g\}$.

iv) 在 X_{f-g}^W中至少存在 n_g+1 个 σ_{f-g}的 Chebyshev 交错点[6].

证明 必要性由[5]中的引理 1,引理 2 及本文中定理 1 得到.

为证充分性,先证两个引理.

引理 3 对$\forall g\neq h\in G$. $S\in C[a,b]$若 $\|s\|=1$ 且 $Z(|S|-1)\cap Z(h-g)\neq\Phi$ 则存在 $P\in G$ 使

$$\operatorname{sign}(p-g)(x)=s(x),\quad \forall x\in z(|s|-1)\cap z(h-g).$$

证明 设 $N=\sup\limits_{x\in X}\{|y^+(x)|,|y^-(x)|\}$.

$$M>\max\{\max_{x\in X}W(x,\|h-g\|+2N);\max_{x\in X}W(x,-\|h-g\|-2N)\},$$

则

$$W_+^{-1}(x,M)\geqslant\|h-g\|+2N,\qquad \forall x\in X,$$
$$W_-^{-1}(x,M)\leqslant-(\|h-g\|+2N),\quad \forall x\in X.$$

定义

$$m'(x)=\begin{cases}-W_1^{-1}(x,M), & 若 S(x)<0,\\ 0, & 若 S(x)=0,\\ W_+^{-1}(x,M), & 若 S(x)>0.\end{cases}$$

取 $t\in C[a,b]$,使

$$t(x)=\begin{cases}1, & 若 S(x)=0,\\ 0, & 若 |S(x)|=1,\end{cases}$$

且 $0<t(x)<1$ $\forall x\in\{x:S(x)\neq 0$ 或 $|S(x)|\neq 1\}$. 令

$$m(x)=(1-t(x))m'(x)+t(x)|h(x)-g(x)|,$$

则易验证 $m\in c[a,b]$,且 $|h(x)-g(x)|\leqslant m(x)\leqslant m'(x)$,$\forall x\in[a,b]$. 定义

$$f(x)=g+s(x)[m(x)-|h(x)-g(x)|],$$

则

$$\|f-g\|_W=M,$$
$$X_{f-g}^W=Z(h-g)\cap z(|s|-1),$$
$$\sigma_{f-g}(x)=s(x),\quad \forall x\in z(h-g)\cap z(|s|-1).$$

另一方面

$$f(x)-h(x)=s(x)[m(x)-|h(x)-g(x)|]+g(x)-h(x),$$

故

$$-m(x)\leqslant f(x)-h(x)\leqslant m(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

从而

$$\|f-h\|_W\leqslant M.$$

由此可得，若 $g\in P_G^W(f)$ 则 $h\in P_G^W(f)$，但由 i)与 iii)的等价性及引理 1 后的注知，此时 $P_G^W(f)$ 必为单点集，故 $g\overline{\in}P_G^W(f)$，从而由 i)与 ii)的等价性，存在 $P\in G$ 使

$$\operatorname{sign}(p-g)(x)=s(x),\quad \forall x\in z(|s|-1)\cap z(h-g).$$ □

引理 4 对 $\forall g\in G,\forall h\in G$，若 $g\neq h$，则 $[a,b]$ 上至多存在 $g-h$ 的 n_g 个 Chebyshev 交错点，即 $\operatorname{sign}(g-h)(x_i)=(-1)^i\operatorname{sign}(g-h)(x_0),i=1,2,\cdots,n_g$.

证明 反设存在 $g\neq h\in G,X_0<x_1,<\cdots,<X_{n_g}$，使

$$\operatorname{sign}(g-h)(xi)=(-1)^i\operatorname{sign}(g-h)(x_0),\quad i=1,2,\cdots,n_g.$$

取 $S\in C[a,b]$ 满足

$$S(x_i)=\begin{cases}W_+^{-1}(x_i,M), & 若(g-h)(x_i)<0,\\ W_-^{-1}(x_i,M), & 若(g-h)(x_i)>0,\end{cases}\quad i=0,1,\cdots,n_g.$$

而当 $x\in[a,b]\backslash\{x_0,\cdots,x_n\}$ 时有

$$W_-^{-1}(x,M)<S(x)<W_+^{-1}(x,M),$$

其中 NM 同引理 3 的证明，定义

$$f(x)=s(x)+g(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

则

$$\|f-g\|_w=M,$$

$$X_{f-g}^W=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n_g}\},$$

$$\sigma_{f-g}(x)=\operatorname{sign}(h-g)(x),\quad \forall x\in X_{f-g}^W,$$

从而 $\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-h)(x):x\in X_{f-g}^W\}<0$. 与 ii)与 iv)的等价矛盾，引理证毕.

定理 3 的充分性证明 首先证明 $\forall g\in G$，G 在 g 处有次数为 n_g 的性质 Z，$\forall h\in G,h\neq g$，反设 $Z(h-g)$ 至少有 n_g 个元，取 X_{i_0} 使 $h(x_{i_0}\neq g(x_{i_0}),X_0<x_1<\cdots<x_{i_0-1}<x_{i_0+1}<\cdots<x_{n_g}\in Z(h-g)$ 并设

$$x_0<x_1<\cdots<x_{i_0-1}<x_{i_0}<x_{x_0+1}<\cdots<x_{n_g},$$

定义 $s(x)\in c[a,b]$，$\|s\|=1$，且

$$s(x_i)=(-1)^{i+i_0}\operatorname{sign}(h-g)(x_{i_0}),i=0,1,\cdots,ng.$$

由引理 3 知，存在 $P\in G$ 使

$$\operatorname{sign}(p-h)(x_i)=s(x_i),\quad i=0,1,\cdots,i_0-1,i_0+1,\cdots,n_g.$$

由 G 有弱中间性质，故存在 $\{g_n\}\subset G$ 使 $\lim\limits_n g_n=h$，且

$$\operatorname{sign}(g_n-h)(x_i)=\operatorname{sign}(p-g_n)(x_i),\quad i\neq i_0.$$

从而由 $g(x_i)=h(x_i)\ (i\neq i_0)$ 知

$$\operatorname{sign}(g_n-g)(x_i)=\operatorname{sign}(p-h)(x_i),\quad i\neq i_0.$$

又因$\lim\limits_{n}(g_n-g)(x_{i_0})=(h-g)(x_{i_0})$，故

$$\mathrm{sign}(g_n-g)(x_i)=(-1)^{i+i_0}\mathrm{sign}(h-g)(x_{i_0}),\quad i=0,1,\cdots,n_g.$$

与引理 4 矛盾，故 G 在 g 处有次数为 n_g 的性质 z.

下面来证 G 在 g 处有次数为 n_g 的性质 A.

令 $I_0=[a,x_1-\varepsilon]$，$I_i=[x_i+\varepsilon,x_i-\varepsilon]$，$i=1,2,\cdots,m-1$ $I_m=[x_m+\varepsilon,b]$，取 $S\in C[a,b]$使

$$S(x)=\begin{cases}W_+^{-1}(x,M), & x\in I_i \text{ 且}(-1)^i\sigma>0,\\ W_-^{-1}(x,M), & x\in I_i \text{ 且}(-1)^i\sigma<0,\end{cases}$$

$$W_-^{-1}(x,M)<S(x)<W_+^{-1}(x,M),\quad \forall\, x\,\overline{\in}\bigcup_{i=0}^{m}I_i.$$

定义

$$f(x)=s(x)+g(x),\quad \forall\, x\in X,$$

则

$$\|f-g\|_W=M,$$

$$X_{f-g}^W=\bigcup_{i=0}^{m}I_i.$$

因 X_{f-g}^W 中只有 $m+1\leqslant n_g$ 个 σ_{f-g}的 Chebyshev 交错点，故 $g\in P_g^W(f)$，从而存在 $P\in G$ 使

$$\max\{\sigma_{f-g}(x)(g-p)(x):x\in X_{f-g}^W\}<0.$$

因 G 有弱中间性质，故存在 $h\in G$ 使 $\|h-g\|<\varepsilon$ 且

$$\mathrm{sign}(h-g)(x)=\mathrm{sign}(p-g)(x),\quad \forall\, x\in X_{f-g}^W,$$

即

$$\mathrm{sign}(h-g)(x)=\sigma_{f-g}(x)=(-1)^i\sigma,\quad x\in I_i,$$

$i=0,1,\cdots,m$，即 G 在 g 处有次数为 n_g 的性质 A，故 G 有次数. □

注 1 若 G 是有理函数集，则 G 有次数，从而定理 3 给出广义权函数有理逼近的交错型特征定理.

注 2 若 G 有次数，$f\in c(x)$，$g\in P_G^W(f)$.

若 $Z(\sigma_{f-g})=\Phi$ 则 f 的广义权函数最佳逼近是唯一的.

4 应 用

首先应该指出，若 $W(x,y)=|y|\ \forall\ (x,y)\in X\times R$，则立即可得 $C(X)$中 Kolmogorov 集与弱中间性质，交错集与有次数的等价值这一经典结果[5]，下面给出其它广义 Chebyshev 逼近的应用：

应用 I（带权逼近） 令

$$W(x,y)=h(x)|y|,\quad \forall\ (x,y)\in X\times R,$$

其中$h\in C(X)$且$h(x)>0$，$\forall\ x\in X$，显然，$W(x,y)$满足条件 i)，ii)，iv)，且关于 $y^-(x)=y^+(x)=0$，$\forall\ x\in X$ 满足条件 iii)，由于 $W_k(x,y)=kW(x,y)$，故若 G 是 W-Kolmogorov 集，则$\forall\ k=1,2,\cdots,kG$ 也是 Kolmogorov 集，故由定理 2 与定理 3 可得.

推论 1 $G\subset C(X)$，则 G 是 W-Kolmogorov 集$\Leftrightarrow G$ 有弱中间性质.

推论 2 $G\subset[a,b]$，G 有次数$\Leftrightarrow\forall f\in C[a,b]$，$g\in G$. 定理 3 中的条件 i)，ii)，iii)，iv)等价.

应用Ⅰ[5,7,8]（加权逼近） 令

$$w(x,y)=|y|+W(x),\quad \forall (x,y)\in X\times R,$$

其中 w 是 $C(X)$中的非负函数，显然 W 满足条件 i)—iv)且 $y^{-}(x)=y^{+}(x)=0\ \forall x\in X$，所以由定理 2 和定理 3 得：

推论 3 G 有弱中间性质$\Leftrightarrow\forall k=1,2,\cdots,kG$ 是 W-Kolmogorov 集.

推论 4 G 有次数$\Leftrightarrow G$，具有弱中间性质且定理 3 中的条件 i)—iv)等价①.

应用Ⅱ[9,10] 令

$$W(x,y)=h(x)\frac{|y|}{1+|y|},\quad \forall (x,y)\in R\times R,$$

其中 $h\in C(R)$是正偶函数，且 $h(0)=1$ $h(x)\to 0(x\to 0)$在$(0,+\infty)$上严格降. 显然，$W(x,y)$在$[-M,M]\times R$ 上满足条件 i)，ii)，iii)，且 $y^{+}(x)=y^{-}(x)=0$，其中 M 是任一正数.

引理 5 设 $f\in C(R)$则存在 $M>0$，使$\forall g\in G$，

$$\sup_{x\in R}(x,(f-g)(x))=\sup_{|x|\leqslant M}W(x,(f-g)(x)).$$

证明 记 $d(f,g)=\sup\limits_{x\in R}W(x,(f-g)(x))$，$d(f,g)_M=\sup\limits_{|x|\leqslant M}W(x,(f-g)(x))$. 无妨设 $\inf\limits_{g\in G}d(f,g)>0$，

$$\sup_{|x|>M}h(x)<\inf_{g\in G}d(f,g),$$

则$\forall g\in G$，

$$\sup_{|x|>M}h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\leqslant\sup_{|x|>M}h(x)<\inf_{g\in G}d(f,g)<d(f,g),$$

故

$$d(f,g)_M=d(f,g),\quad \forall g\in G.$$ □

令 $W|_M=W|_{[-M,M]\times R}$，则由引理 5 知，$g\in P_G^W(f)\Leftrightarrow g\in P_G^{W|M}(f)$，从而由定理 1 及定理 3 得

推论 5 设 $G\subset C(R)$且在任何有限闭区间上有弱中间性质，则 $g\in P_G^W(f)\Leftrightarrow\forall h\in G$ 存在 $x\in R$，使 $h(x)\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}=d(f\cdot g)$且

$$[f(x)-g(x)][g(x)-h(x)]\geqslant 0.$$

推论 6 若 G 在任何有限闭区间上都具有次数，则 $g\in P_G^W(f)\Leftrightarrow$存在 n_g+1 个点 $x_0<x_1<\cdots<x_{n_g}$使 $h(x_i)\frac{|f(x_i)-g(x_i)|}{1+|f(x_i)-g(x_i)|}=d(f\cdot g)$，且 $x_0,x_1,\cdots,x_{n_g}$是 $\mathrm{sign}(f-g)(x)$的 Chehyshev 交错，此时，$P_G^W(f)$至多是单点集.

注 1 在上述三种情况下 $\sigma_{f-g}(x)=\mathrm{sign}(f-g)(x)$.

注 2 当 G 是 Haar 子空间时，推论 6 在[9,10]中被证明.

注 3 在应用Ⅱ中 W 不满足 iv).

---

① 指对所有满足 $Z(\sigma_{f-g})=\psi$ 的 f,g 而言.

参 考 文 献

1 Moursund D G. *Chebyshev approximation using a generalized weight function*. SIAM. J. Number Anal., 1996, **3**: 435～450

2 Moursund D G. *Computional aspects of Chebyshev approximation using a generalized weight function*. SIAM. J. Number, Anal., 1968, **5**: 126～137

3 Taylor G D. *On approximation by polynomials having restricted ranges*. SIAM. J. Number, And., 1968, **5**: 258～268

4 Cheney E W. *Introduction to approximation theory*. McGraw-Hill, New York, 1966.

5 Smarzewski R. *Chebyshev additive weight approximation by maximal families*. J. Approx, Theory, 1982, **35**: 195～202

6 Lorentz G G. *Approximation of functions*. Holt, Rinehart and winston, Inc, 1996.

7 Gillotte M J and Mclaughlin H W. *On addifive weight approximation and simultaneous Chebyshev approximation, using varisolvent families*. J. Approx. Theory, 1976, **17**: 35～43

8 李 冲. 加权Chebyshev通近. 数学年刊A, 1990, 11: 308～313

9 Albinus G. *Approximation theorie in Raam(IR)*. Beitrage zur Analysis, 1972, **3**: 31～44

10 Andras Kroo. *On strong unicity of best approximation in C(R)*. Number Funct, Anal and Optimiz. 1981—1982, **4**(4): 437～443

11 Braess D. *Nonlinear approximation theory*. Spring-Verlag; Berlin Heidelberg Mew York, 1986.

Nonlinear Generalized Weighted Approximation

Yang Wenshan

(Zhejiang Normal University, Jinhua 321004)

Abstract

This paper gives complete characterisation in means of Kolmogorov criterion and sign—property for nonlinear approximation using generalized weight function, thereby obtains some application in weak middle property.

Keywords characlerisation, nonlinear approximation by a generalized weight function.