第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

多滞量二阶中立型方程的周期解*

曹进德
(云南大学成人教育学院，昆明 650091)

摘 要 本文利用Fourier级数理论，讨论了一类多滞量二阶中立型方程

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)+\sum_{i=1}^{m}[u_ix''(t-h_i)+v_ix'(t-h_i)+w_ix(t-h_i)]=f(t)$$

的周期解问题，获得了若干确保周期解存在唯一的充分条件，并推广、改进和完善了一些相关文献的结果.

关键词 中立型方程，Fourier 级数，周期解.
分类号 AMS(1991) 34C25,34K/CCL O175.1

本文研究如下多滞量二阶中立型方程

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)+\sum_{i=1}^{m}[u_ix''(t-h_i)+v_ix'(t-h_i)+w_ix(t-h_i)]=f(t) \quad (1)$$

的周期解问题，其中 $h_i>0,u_i,v_i,w_i(i=1,2,\cdots m),a_i(i=1,2)$均为常数，$f(t)$是连续可微的且以 $2T$ 为周期的函数，设其 Fourier 展开式为

$$f(t)=k_0+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos\frac{n\pi t}{T}+d_n\sin\frac{n\pi t}{T}),$$

其中 k_o,k_n,d_n 为其 Fourier 系数.

文[1]对方程(1)只讨论过当 $m=1$ 时的情形，本文获得的结果在 $m=1$ 时全面改进并推广了文[1]的结果，同时也完善了[1]的主要结果的证明，在文[2]中，作者对(1)也进行过研究，本文试对(1)进行再分析，获得了若干充分条件，这些结果亦改进了[2]的主要结果，特别是(1)的当 $m=1,m=2$ 时的情形被全面推广.

定理1 设 $\sigma\triangleq 1-2\sum_{i=1}^{m}|u_i|-2\sum_{i,j=1,i\neq j}^{m}|u_i||u_j|+\sum_{i=1}^{m}|u_i|^2>0$，但对一切自然数 n，如下代数方程

$$\begin{cases}(a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i)b_0=k_0\\ p(n)b_n+q(n)l_n=k_n\\ -q(n)b_n+p(n)l_n=d_n\end{cases} \quad (2)$$

关于 b_0,b_n,l_n 有解，其中

* 1996年1月3日收到. 1997年12月22日收到修改稿.
国家自然科学基金与云南省自然科学研究基金资助课题.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$p(n) = -\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2\left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i \cos\frac{n\pi h_i}{T}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n\pi}{T} v_i \sin\frac{n\pi h_i}{T} + w_i \cos\frac{n\pi h_i}{T}\right) + a_2,$$

$$q(n) = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} u_i \sin\frac{n\pi h_i}{T} + \frac{n\pi}{T}\left(a_1 + \sum_{i=1}^{m} v_i \cos\frac{n\pi h_i}{T}\right) - \sum_{i=1}^{m} w_i \sin\frac{n\pi h_i}{T},$$

则方程(1)存在以 $2T$ 为周期的连续可微解.

证明 设方程(2)有解,构造如下的三角级数

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cos\frac{n\pi t}{T} + l_n \sin\frac{n\pi t}{T}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{T} l_n \cos\frac{n\pi t}{T} - \frac{n\pi}{T} b_n \sin\frac{n\pi t}{T}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 b_n \cos\frac{n\pi t}{T} - \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 l_n \sin\frac{n\pi t}{T}\right).$$

下证以上三个三角级数,当 $\sigma > 0$ 时均绝对收敛和一致收敛.

因为

$$p^2(n) + q^2(n) = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^4\left[\left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i \cos\frac{n\pi h_i}{T}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m} u_i \sin\frac{n\pi h_i}{T}\right)^2\right] + R(n)$$

$$\geqslant \left(1 - 2\sum_{i=1}^{m}|u_i| - 2\sum_{i,j=1,i\neq j}^{m}|u_i||u_j| + \sum_{i=1}^{m} u_i^2\right)\left(\frac{n\pi}{T}\right)^4 + R(n)$$

$$= \left(\frac{n\pi}{T}\right)^4 \sigma + R(n)$$

这里 $R(n)$ 是关于 n 的三次多项式,且这个多项式的系数都是由 $a_1, a_2, u_i, v_i, w_i, \cos\frac{n\pi h_i}{T}$, $\sin\frac{n\pi h_i}{T}(i=1,2,\cdots m)$ 施行有限次加减法和乘法得到的,于是必存在充分大的自然数 N,当 $n \geqslant N$ 时,有

$$p^2(n) + q^2(n) \geqslant \frac{\sigma}{4}\cdot\left(\frac{n\pi}{T}\right)^4 \geqslant \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2, \tag{3}$$

由方程(2)可推出

$$(p^2(n) + q^2(n))b_n = p(n)k_n - q(n)d_n, \tag{4}$$

$$(p^2(n) + q^2(n))l_n = q(n)k_n + p(n)d_n. \tag{5}$$

由(3),(4),(5)可推出当 $n \geqslant N$ 时,有

$$\frac{n\pi}{T}(|b_n| + |l_n|) \leqslant \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2(|b_n| + |l_n|) \leqslant \sqrt{p^2(n) + q^2(n)}(|b_n| + |l_n|)$$

$$= \frac{|p(n)k_n - q(n)d_n|}{\sqrt{p^2(n) + q^2(n)}} + \frac{|q(n)k_n + p(n)d_n|}{\sqrt{p^2(n) + q^2(n)}}$$

$$\leqslant 2(|k_n| + |d_n|),$$

即当 $n \geqslant N$ 时,有

$$\frac{n\pi}{T}(|b_n| + |l_n|) \leqslant 2(|k_n| + |d_n|),$$

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2(|b_n| + |l_n| \leqslant 2(|k_n| + |d_n|).$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

注意到

$$|k_n|+|d_n|=\frac{T}{n\pi}(|\frac{n\pi}{T}k_n|+|\frac{n\pi}{T}d_n|)\leqslant\frac{T}{\pi}\cdot\frac{1}{2n^2}+\frac{T}{\pi}(|\frac{n\pi}{T}k_n|^2+|\frac{n\pi}{T}d_n|^2),$$

则有(当 $n\geqslant N$ 时)

$$(\frac{n\pi}{T})(|b_n|+|l_n|)\leqslant\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(\frac{n\pi}{T})^2(|b_n|+|l_n|)\leqslant\frac{T}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{2T}{\pi}(|\frac{n\pi}{T}k_n|^2+|\frac{n\pi}{T}d_n|^2).$$

由于 $\frac{n\pi}{T}k_n,\frac{n\pi}{T}d_n$ 是 $f'(t)$ 的 Fourier 系数,由 Bessel 不等式可得

$$\sum_{n=N}^{\infty}(|\frac{n\pi}{T}k_n|^2+|\frac{n\pi}{T}d_n|^2)\leqslant\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}[f'(t)]^2dt$$

这表明 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(|\frac{n\pi}{T}k_n|^2+|\frac{n\pi}{T}d_n|^2)$ 是收敛的,又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{T}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}$ 收敛,于是

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{n\pi}{T}(|b_n|+|l_n|),\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(\frac{n\pi}{T})^2(|b_n|+|l_n|)$$

均收敛,从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{T}(|b_n|+|l_n|),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(\frac{n\pi}{T})^2(|b_n|+|l_n|)$$

均收敛. 因为

$$|b_n\cos\frac{n\pi t}{T}+l_n\sin\frac{n\pi t}{T}|\leqslant|b_n|+|l_n|\leqslant\frac{n\pi}{T}(|b_n|+|l_n|),n\geqslant[\frac{T}{\pi}]+1=N,$$

$$|\frac{n\pi}{T}l_n\cos\frac{n\pi t}{T}-\frac{n\pi}{T}b_n\sin\frac{n\pi t}{T}|\leqslant\frac{n\pi}{T}(|b_n|+|l_n|),$$

$$|-(\frac{n\pi}{T})^2b_n\cos\frac{n\pi t}{T}-(\frac{n\pi}{T})^2l_n\sin\frac{n\pi t}{T}|\leqslant(\frac{n\pi}{T})^2(|b_n|+|l_n|),$$

由此知

$$b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos\frac{n\pi t}{T}+l_n\sin\frac{n\pi t}{T}),\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{T}l_n\cos\frac{n\pi t}{T}-\frac{n\pi}{T}b_n\sin\frac{n\pi t}{T})$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-(\frac{n\pi}{T})^2b_n\cos\frac{n\pi t}{T}-(\frac{n\pi}{T})^2l_n\sin\frac{n\pi t}{T}]$$

均为绝对收敛和一致收敛的.

现记 $x(t)=b_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n\cos\frac{n\pi t}{T}+l_n\sin\frac{n\pi t}{T})$,则有

$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{T}l_n\cos\frac{n\pi t}{T}-\frac{n\pi}{T}b_n\sin\frac{n\pi t}{T}),$$

$$x''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[-(\frac{n\pi}{T})^2b_n\cos\frac{n\pi t}{T}-(\frac{n\pi}{T})^2l_n\sin\frac{n\pi t}{T}],$$

且 $x''(t)$ 连续,不难验证 $x(t)$ 满足方程(1),因此 $x(t)$ 方程(1)的以 $2T$ 为周期的连续可微解.

推论 1 设 $\sigma>0$,若

$$\begin{cases}a_2+\sum\limits_{i=1}^{m}w_i\neq 0,\\ p^2(n)+q^2(n)\neq 0\ (n=1,2,\cdots),\end{cases}\tag{6}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则方程(1)存在唯一的以 $2T$ 为周期的连续可微解.

证明 只要注意到(6)式是代数方程(2)有唯一解的充要条件即明.

推论 2 $\sum_{i=1}^{m}u_i \neq -1, a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i \neq 0, h_i = 2\lambda_i T$ (λ_i 为正整数, $i=1,2,\cdots,m$), 且下面任一条件成立

(i) $a_1+\sum_{i=1}^{m}v_i \neq 0$;

(ii) $(a_2++\sum_{i=1}^{m}w_i)(1+\sum_{i=1}^{m}u_i)<0$;

(iii) $(a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i)(1+\sum_{i=1}^{m}u_i)>0, \frac{T}{\pi}\sqrt{\dfrac{a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i}{1+\sum_{i=1}^{m}u_i}}$ 不是自然数.

则方程(1)存在唯一的以 $2T$ 为周期的连续可微解.

证明 事实上,当 $h_i=2\lambda_i T$,类似定理 1 的推导可得

$$p(n)=-(\frac{n\pi}{T})^2(1+\sum_{i=1}^{m}u_i)+(a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i),$$

$$q(n)=\frac{n\pi}{T}(a_1+\sum_{i=1}^{m}v_i),$$

当 $a_1+\sum_{i=1}^{m}v_i \neq 0$,有 $q(n)\neq 0$,于是

$$p^2(n)+q^2(n)\neq 0;$$

当 $(a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i)(1+\sum_{i=1}^{m}u_i)<0$ 时 $p(n)\neq 0$,于是

$$p^2(n)+q^2(n)\neq 0;$$

当 $(a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i)(1+\sum_{i=1}^{m}u_i)>0, \sqrt{(a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i)/(1+\sum_{i=1}^{m}u_i)}$ 不是自然数,也有 $p(n)\neq 0$,从而

$$p^2(n)+q^2(n)\neq 0.$$

综合上述,(i),(ii),(iii) 三个条件,只要一个成立时,都有 $p^2(n)+q^2(n)\neq 0(n=1,2,\cdots)$,又已知 $a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i\neq 0$,从而知代数方程(6) 存在唯一解,类似于定理 1 的证明可证推论 2 的结论成立.

注 1 在推论 1 中,要求(6) 对一切自然数均成立,但实际上,当 $\sum_{i=1}^{m}|u_i|<1$ 时,只要注意到

$$p(n)\geqslant(\frac{n\pi}{T})^2(1-\sum_{i=1}^{m}|u_i|)-\frac{n\pi}{T}\sum_{i=1}^{m}|v_i|-\sum_{i=1}^{m}|w_i|-|a_2|\to+\infty,$$

即知只需考查对有限个自然数(6) 式成立即可.

由于代数方程

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\delta^2(1-\sum_{i=1}^{m}|u_i|)-\delta\sum_{i=1}^{m}|v_i|-\sum_{i=1}^{m}|w_i|-|a_2|=0$$

只有唯一正根 δ，因此，不难知推论 1 中只需考查小于或等于$\frac{T}{\pi}\delta$ 的自然数即可，于是又有：

推论 3 若 $\sigma>0$ 且 $\sum_{i=1}^{m}|u_i|<1, a_2+\sum_{i=1}^{m}w_i\neq 0, \frac{T}{\pi}\delta<1$，则方程(1)存在唯一的 $2T$ 为周期的连续可微解.

证明 因为$\frac{T}{\pi}<1$，由此可推出 $|p(n)|\neq 0(n=1,2,\cdots)$，从而有 $p^2(n)+q^2(n)\neq 0(n=1,2,\cdots)$，于是由推论 1 易知推论 3 的结论成立.

注 2：至此我们已全面改进并推广了文献[1,2]的结果，尤其是在 $m=1$ 下，将文[1]定理 1 中的条件 $|u_i|<\frac{1}{2}$(这里的 u_1 相当于文[1]的 C)改进为 $\sigma=1-2|u_1|+|u_1|^2=(1-|u_1|)^2>0$，即 $|u_1|\neq 1$，从而文[1]的其它定理也可相应得到改进. 同时本文的结果也改进或完善了文[2]的相应结果，特别是当 $m=1, m=2$ 时文[2]的结果被全面改进.

参考文献

1 章毅等. 关于二阶常系数线性中立型方程的周期解. 数学学报，1990，33(4)：517～520

2 曹进德等. 一类二阶中立型方程的周期解. 纯粹数学与应用数学，1995，11(增刊)：102～106

Periodic Solutions of Second Order Neutral Equations with Some Delays

Cao Jinde

(Adult Education College, Yunnan University, Kunming 650091)

Abstract

Using Fourier series theory, periodic solutions of a class of second order neutral equation with some delays:

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)+\sum_{i=1}^{m}[u_ix''(t-h_i)+v_ix'(t-h_i)+w_ix(t-h_i)]=f(t)$$

are studied, some sufficient conditions of existence and uniqueness of periodic solutions are obtained. Thus some previous results are extended and improved.

Keywords neutral equation, Fourier series, periodic solution.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.