第19卷第1期 1999年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 19 No. 1 Feb. 1999

α凸性泛函簇的共鸣定理*

刘 佳 罗跃虎
(山西大学数学系，太原 030006) (南开大学数学科学学院，天津 300071)

摘 要 本文引入α拟凸性泛函簇的概念，给出了这类泛函簇的共鸣定理. 我们的结果推广了文[6]—[13]中的相应结果.

关键词 凸泛函，线性拓扑空间，共鸣定理.
分类号 AMS(1991) 46A/CCL O177.3

1 引言和记号说明

共鸣定理是泛函分析中最重要的定理之一. 由于它在理论上和应用上的重要性，因而得到不同形式的拓广. 近来，文[8]通过引入F性泛函簇的概念，给出了F性泛函簇准一致有界的特征，这与共鸣定理的结论成立还有一步之遥. 由于F性泛函的广泛性(实际上它包含了所有泛函簇)有必要对F性泛函分类讨论. 本文将引入F型二纲集、α拟凸性泛函簇的概念——它以一致渐近拟凸性泛函簇[7]、凸性泛函簇[8]和Γ-凸泛函簇[9]为真子类——给出这类泛函簇的共鸣定理. 其结果推广了文[6—13]中的有关结果.

沿用[3]，[8]中的定义和记号，并且对$0<\alpha\leqslant 1$，记$x_\Lambda \pm x=\{x_l\pm x:l\in\Lambda\}$；$S_\infty^\alpha(A,B)$为$A$与$B$所成的$\alpha$拟凸包，即$S_\infty^\alpha(A,B)=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}(\lambda A+(1-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}B)$；$S_\infty^\alpha(A_\Lambda,A)\overset{\triangle}{=}\{S_\infty^\alpha(A_l,A):l\in\Lambda\}$；$\mathrm{co}_\alpha(A)$为$A$的$\alpha$凸包. 记$X$上的二元运算簇[8]$F_{\alpha c}=\{f_\lambda:\lambda\in[0,1]\}$，其中$f_\lambda$:$f_\lambda(x,y)=\lambda x+(1-\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}y$，$\forall\ x,y\in X$. 显然有：

$$F_{\alpha c}^{(n)}(A)=\{\sum_{k=1}^{2^n}\lambda_k x_k:\lambda_k\geqslant 0,x_k\in A,\sum_{k=1}^{2^n}\lambda_k^\alpha=1\},\quad n=1,2,\cdots,\tag{1.1}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{\alpha c}^{(n)}(A)=\mathrm{co}_\alpha(A),\ S_\infty^\alpha(A,A)=F_{\alpha c}(A).\tag{1.2}$$

2 定义和引理

本节总用F表示X上的一簇有限元运算.

定义 2.1 设$Q\subset X$，称$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(Q)$为$Q$的$F$包，记作$F^b(Q)$.

* 1996年4月29日收到.
国家自然科学基金、博士后基金资助项目.

定义 2.2　设 X 为拓扑线性空间，$Q\subset X$. 如果对 $F^{b}(Q)$ 的任何单增分解 $\{Q_n\}_1^{\infty}$，即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = F^{b}(Q),\ Q_{n+1}\supset Q_n,\ n\in\mathscr{N} \tag{2.1}$$

都存在 $m_0,n_0\in\mathscr{N}$ 使 $\overline{\overset{\circ}{F^{(m_0)}(Q_{n_0})}}\neq\varnothing$，则称 Q 为 X 中的 F 型二纲集；若 $Q=X$ 为 F 型二纲集，则称 X 为 F 型二纲空间.

附注 2.1　不难验证 F 型二纲空间的定义与[8]中 Z_F 空间的定义是等价的.

定义 2.3　称 X 上的泛函簇 $T=\{t_l:l\in\Lambda\}$ 是在闭集 $Q\subset X$ 上一致拟下半连续的，如果存在趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}_1^{\infty}$ 使得集合

$$Q_n=\{x\in Q: T(x)\leqslant a_n\},\quad n\in\mathscr{N} \tag{2.2}$$

都是 X 中的闭集.

定义 2.4　设 X 为线性空间，$T=\{t_l:l\in\Lambda\}$ 为 X 上的泛函簇. 如果对任何 $A\subset X$，$T[A]<+\infty$ 蕴含 $T[F_{ac}A]<+\infty$（即 T 为 X 上的 F_{ac} 性泛函簇[8]），则称 T 为 X 上的 α 拟凸性泛函簇. 进一步，当 T 中仅含一个泛函 t 时，则称 t 为 X 上的 α 拟凸性泛函.

显然 X 上的凸性泛函簇（即 F_{∞} 性泛函簇[8]）是 X 上的 1 拟凸性泛函簇，因而 X 上的一致渐近拟凸性泛函簇[7]是 X 上的 1 拟凸性泛函簇，且不难验证：赋 β 范空间 X 上的 Γ-凸泛函是 X 上的 1 拟凸性泛函，X 上的以同一个 $\Gamma(a,b,c,\lambda,\mu)$ 为控制限[9]的 Γ-凸泛函簇 $T=\{t_l:l\in\Gamma\}$ 是 X 上的 1 拟凸性泛函簇.

例 2.1　设 X 为赋 β-范空间（$0<\beta<1$，且 X 是不可赋范的，$\|\cdot\|$ 为 X 上的 β 范数，对任何 $n\in\mathscr{N}$ 定义 X 上的泛函 t_n 如下：

$$t_n=\begin{cases} e^{\|x\|}, & \text{当 } \|x\|\leqslant 1,\\ e^{n\|x\|-n+1}, & \text{当 } \|x\|>1,\end{cases}$$

则算子簇 $T=\{t_n:n\in\mathscr{N}\}$ 是 X 上的 β 拟凸性泛函簇，但它既不是 X 上的凸性泛函簇，也不是 X 上以任何 $\Gamma(a,b,c,\lambda,\mu)$ 为同一控制限的 Γ-凸泛函簇.

命题 2.1　设 X 是 F_{ac} 二纲型扑线性空间，则原点 θ 的任何邻域 U 都是 F_{ac} 型二纲集.

证明　设 $\{E_n\}_1^{\infty}$ 是 $F_{ac}^{b}(U)$ 的单增分解，不妨认为 $\theta\in E_1$（否则将 θ 添入 E_1 即可），由 U 的吸收性易得 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nE_n$，令 $Q_n=nF_{ac}^{(n)}(E_n)$，$n\in\mathscr{N}$，则有

$$Q_{n+1}=(n+1)F_{ac}^{(n+1)}(E_{n+1})\supset(n+1)\frac{n}{n+1}F_{ac}^{(n)}(E_{n+1})\supset nF_{ac}^{(n)}(E_n)=Q_n,\ \forall\, n\in\mathscr{N},$$

且 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Q_n$. 由对 X 的假设知存在 $m_0,n_0\in\mathscr{N}$，使 $\overline{\overset{\circ}{F_{ac}^{(m_0)}(Q_{n_0})}}\neq\varnothing$. 注意到

$$\overline{\overset{\circ}{F_{ac}^{(m_0)}(Q_{n_0})}}=\overline{n_0\overset{\circ}{F_{ac}^{(m_0+n_0)}(E_{n_0})}}=\overline{n_0\overset{\circ}{F_{ac}^{(m_0+n_0)}(E_{n_0})}}$$

故知 $\overline{\overset{\circ}{F_{ac}^{(m_0+n_0)}(E_{n_0})}}\neq\varnothing$. 所以 U 是 F_{ac} 型二纲集.　□

引理 2.1　设 O_1,O_2 是 X 的邻域，Q 为 O_2 的稠密子集，则

(1) $S_{\infty}^{\alpha}(O_1,O_2)=S_{\infty}^{\alpha}(O_1,Q)$；　(2) $\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup O_2)=\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup Q)$.

证明　(1)　由[8] § 5 引理 1 知：对 $\lambda_1\in(0,1]$，$\lambda_2\geqslant 0$，$\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}=1$ 有：$\lambda_1O_1+\lambda_2Q=\lambda_1O_1+\lambda_2O_2$. 又对任何 $x\in O_2$，取 $x_0\in O_1$，则有 $\delta>0$ 使 $y_0=(1+\delta^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}x-\delta x_0\in O_2$，那么

$$x=\frac{1}{(1+\delta^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}(y_0+\delta x_0)\in\bigcup_{\lambda_1\in(0,1],\lambda_2\geqslant 0,\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}=1}(\lambda_1 O_1+\lambda_2 O_2).$$

故知

$$S_{\infty}^{\alpha}(O_1,Q)\supset\bigcup_{\lambda_1\in(0,1],\lambda_2\geqslant 0,\lambda_1^{\alpha}+\lambda_2^{\alpha}=1}(\lambda_1 O_1+\lambda_2 O_2)\supset S_{\infty}^{\alpha}(O_1\cup O_2).$$

所以(1)成立.

(2) 利用(1.2)式和结论(1),有

$$\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup Q)=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{\alpha c}^{(n)}(S_{\infty}^{\alpha}(O_1,Q))=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{\alpha c}^{(n)}(S_{\infty}^{\alpha}(O_1,O_2))=\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup O_2)$$ □

引理 2.2 设 X 为拓扑线性空间,$Q\subset X$,则下面二个命题等价:

(1) 设 T 为 X 上的一个 F 性泛函簇,若泛函簇 T 在 Q 上逐点有界[8],则 T 在 X 中的某邻域 V 上准一致有界且 $V\subset\overline{F^{b}(Q)}$;

(2) Q 是 F 型二纲集.

证明 可用[8]定理1的证明方法证明,为节省篇幅略之.

附注 2.2 取 $G=X$ 时,则该引理即为文[8]中定理1.

推论 2.1 设 Q 为 X 的 F 型二纲集,T 为在 $\overline{F^{b}(Q)}$ 上一致拟下半连续的泛函簇.若 T 在 Q 上逐点有界,则存在 X 的邻域 $V\subset\overline{F^{b}(Q)}$ 使 T 在 V 上一致有界[8].

证明 由引理2.2知存在 X 的邻域 $V\subset\overline{F^{b}(Q)}$ 及在 V 中稠密的子集 Q_0 使 $T[Q_0]<+\infty$,设 $\{Q_n\}$ 由(2.2)式定义,则存在 n_0 使 $Q_0\subset Q_{n_0}$.由于 Q_{n_0} 是闭的,故知 $V\subset\overline{Q}_0\subset Q_{n_0}$.所以

$$T[V]<+\infty.$$

引理 2.3 设 t 为 X 上 α 拟凸性泛函,如果满足下面三个条件:

(1) 存在邻域 O_1 使 $t[O_1]<+\infty$(相应地,$\forall\, x\in O_1$ 有 $t(x)<+\infty$).

(2) 存在邻域 O_2 及 O_2 的稠密子集 Q 使得 $t(x)<+\infty,\forall\, x\in Q$.

(3) 存在 $\lambda_0>0$ 和 $x_0\in\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup O_2)$ 使 $t(-\lambda_0 x_0)<+\infty$.

则存在原点的均衡邻域 U 使 $t[U]<+\infty$(相应地,$\forall\, x\in U$ 有 $t(x)<+\infty$).

证明 由[3]§2性质4易知 t 在 $\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup Q)\stackrel{\triangle}{=}A$ 上逐点 $<+\infty$,同样的理由知 t 在 $\mathrm{co}_{\alpha}(A\cup\{-\lambda_0 x_0\})\stackrel{\triangle}{=}B$ 上逐点 $<+\infty$,由引理2.1知 $A=\mathrm{co}_{\alpha}(O_1\cup O_2)$ 为开集,那么由

$$\theta\in\frac{1}{(1+\lambda^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}(\lambda_0 A-\lambda_0 x_0)\subset B$$

知存在 θ 的邻域 V 使 $V\subset B$.取 $y_0\in O_1$ 的 $\delta>0$ 使 $-\delta y_0\in V\subset B$,故有 $t(-\delta y_0)<+\infty$,那么由 t 的 α 拟凸性有 $t[C]<+\infty$,其中 $C=S_{\infty}^{\alpha}(O_1,\{-\delta_0 y_0\})$.注意到 $\theta\in\mathring{C}$,从而可知此命题成立.

□

附注 2.3 此引理去掉了[7](二)定理3中 X 为第二纲集的条件,且放松了对点 x_2 的要求.

3 一致有界原理

定理 3.1 设 X 是 $F_{\alpha c}$ 二纲型扑线性空间,$T=\{t_l:l\in\Lambda\}$ 为 X 上的 α 拟凸性泛函簇,且存

在 X 中的邻域簇 $O_\Lambda=\{O_l:l\in\Lambda\}$ 使

$$T[O_\Lambda]<+\infty, \tag{3.1}$$

则下面的六个结论等价：

(1) 存在原点 θ 的均衡邻域 U 使 $T[U]<+\infty$.

(2) 存在邻域 U 和 $\lambda_0>0, x_0\in \mathrm{co}_\alpha(O)$ 使得 T 在 $O\cup\{-\lambda_0 x_0\}$ 上逐点有界.

(3) 存在 $\lambda_0>0$ 邻域 $O, x_0\in \mathrm{co}_\alpha(O)$ 及在 O 中稠密的某个 $F_{\alpha c}$ 型二纲集 Q 使得 T 在 $Q\cup\{-\lambda_0 x_0\}$ 上逐点有界.

(4) 存在 $\lambda_0>0$ 和 $F_{\alpha c}$型二纲集 Q 及在 Q 中稠密的某个 Q_1 使得 T 在 $Q\cup\{-\lambda_0 Q_1\}$ 上逐点有界.

(5) 存在 $y_\Lambda=\{y_l:l\in\Lambda\}\subset X$ 和 $\lambda>0$ 使得集合 $E=\{x\in X:T[y_\Lambda+x]<+\infty, T[y_\Lambda-x]<+\infty\}$ 为 $F_{\alpha c}$型二纲集 Q 且 $T[-y_\Lambda]<+\infty$.

(6) 存在 $\lambda_0>0$ 使得集合 $E_1=\{x\in X:T(x)<+\infty, T(-\lambda_0 x)<+\infty\}$ 为 $F_{\alpha c}$型二纲集.

证明 由命题 2.1 知(1)⇒(2)～(6)是显然的，再由引理 2.3 知(2)⇒(3)也成立. 下证(6)⇒(5)⇒(4)⇒(3)⇒(1).

(6)⇒(5) 取 $x_0\in E_0$，则有 $T(x_0)<+\infty, T(-\lambda_0 x_0)<+\infty$. 由 T 的 α 拟凸性知 $T[\mathrm{co}_\alpha(\{x_0, -\lambda_0 x_0\})]<+\infty$. 因 $\theta\in \mathrm{co}_\alpha(\{x_0, -\lambda_0 x_0\})$，故知 $T(\theta)<+\infty$，因此(5)成立.

(5)⇒(4) 由于 $\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}x\in S^\alpha_\infty(y_\Lambda+x, -y_\Lambda)$，利用 T 的 α 拟凸性便知 T 在 $\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}E\cup\{-\frac{\lambda_0}{2^{\frac{1}{\alpha}}}E\}$ 上逐点有界，从而(4)成立.

(4)⇒(3) 由[3]§2 性质 4 可知 T 在 $F^b_{\alpha c}(Q)\cup\{-\lambda F^b_{\alpha c}(Q_1)\}$ 上逐点有界，因 Q 为 $F_{\alpha c}$型二纲集且 $O=\overset{\circ}{\overline{F^b_{\alpha c}(Q)}}\neq\varnothing$. 注意到 $F^b_{\alpha c}(Q_1)$ 在 $F^b_{\alpha c}(Q)$ 中稠密，因而在 O 中稠密，故有 $x_0\in O$ 使 $x_0\in F^b_{\alpha c}(Q_1)$. 故知 $T(-\lambda_0 x_0)<+\infty$. 从而(3)成立.

(3)⇒(2) 由引理 2.2 知存在邻域 $O\subset\overline{F^b_{\alpha c}(O)}$ 和 O 的稠密子集 Q_2 使 $T[Q_2]<+\infty$，利用(3.1)式和 T 的 α 拟凸性可知 $T[S^\alpha_\infty(O_\Lambda, Q_2)]<+\infty$. 对每个 $l\in\Lambda$，由引理 2.1 知 $S^\alpha_\infty(O_\lambda, Q_2)=S^\alpha_\infty(O_\lambda, O)\supset O$，因此

$$T[O]\leqslant T[S^\alpha_\infty(O_\Lambda, Q_2)]<+\infty, \tag{3.2}$$

于是对 $T(x)$ 利用引理 2.3 可知(1)成立. □

推论 3.1 X 同定理 2.1，$T=\{t_l:l\in\Lambda\}$ 是在 X 上一致拟下半连续的 α 拟凸性泛函簇，则定理 2.1 的结论成立，即定理 2.1 的(1)－(6)相互等价.

证明 在定理 2.1 证明(1)⇒(6)⇒(5)⇒(4)⇒(3)，(1)⇒(2)⇒(3)的过程中没有利用条件(3.1)式，而由推论 2.1 知：当(3)成立时，条件(3.1)式自然成立，故知命题成立. □

附注 3.1 定理(3.1)中的(2)⇒(1)已将[9]中定理的条件(Ⅰ)，(Ⅱ)减弱.

类似于定理 3.1(3)⇒(2)的证明可以证明下面的定理 3.2 并得到推论 3.2. 为节省篇幅，略去它们的证明.

定理 3.2 条件同定理 3.1 所设，增设每个 t_l 都在原点的某邻域 W_l 上逐点有界，且当 $0<\alpha<1$ 时，再增设 X 是第二纲的，则下面的两个结论等价：

(1) 存在原点 θ 的均衡邻域 U 使 $T[U]<+\infty$.

(2) 存在 $\lambda_0>0$ 和点集 $y_A=\{y_l:l\in A\}\subset X$ 使得

(a) 集合 $E=\{x\in X:T[y_A+x]<+\infty,T[y_A-\lambda_0 x]<+\infty\}$ 为 $F_{\sigma c}$型二纲集 Q 且当 $0<\alpha<1$ 时是第二纲集；

(b) 对原点的任何邻域 V，最多只有有限个 y_l 不属于 V. □

推论 2.2 设 X，$T=\{t_l:l\in A\}$同推论 3.1 所设，又每个 t_l 都在原点的某邻域 W_l 上逐点有界，且当 $0<\alpha<1$ 时，再增设 X 是第二纲空间，则定理 3.2 的结论成立. □

附注 3.2 易见定理 3.2，推论 3.2 中"每个 t_l 都在原点的某邻域 W_l 上逐点有界"的条件不能去掉.

参 考 文 献

1 Taylor A E. *Intrduction to functional to analysis*. New York Wiley, 1958, 123～136

2 Sargent W L C. *On some theorems of Hahn Banach and Steinhaus*. J. London. Math. Soc, 1953, **28**: 438～451

3 Xuan Hengnong. *Uniform boundedness principle for a family of F-functionals*. Northeastern Math. J., 1992, **8**(1): 69～76

4 定光桂. 次加泛函引论. 广西人民出版社，1986.

5 定光桂. 拓扑线性空间选讲. 广西教育出版社，1987.

6 定光桂. 巴拿赫空间引论. 科学出版社，北京，1984.

7 朱继生、李虹. 关于共鸣定理. 数学学报，1988，**331**(2)：192～200

8 宣恒农. 一个一般形式的一致有界原理. 数学学报，1991，**34**(1)：132～137

9 黄践、王利平. 关于凸泛函的共鸣原理的充分条件. 数学学报，1993，**36**(6)：775～777

10 定光桂. 关于次加泛函的两点注记. 数学年刊 A 辑，1984，**5**(2)：253～256

11 罗跃虎. 线性拓扑空间中两类算子簇的共鸣原理. 山西大学学报，1983，**6**(2)：1～7

12 叶怀安. 共鸣定理在非线性泛函分析的一个应用. 中国科学大学学报，1985，**15**(2)：223～224

13 范达. 关于拓扑线性空间中两个非线性算子的共鸣定理. 中山大学学报，1983，1：56～64

14 刘佳、罗跃虎. 加性泛函簇的共鸣定理. 数学研究与评论，1996，**9**(2)：285～290

Resonance Theorem on a Famaily of α-Convex Functionals

Liu Jia

(Dept. Math., Shanxi University, Taiyuan 030006)

Luo Yuehu

(Mathematics Science College, Nankai University, Tanjin 300071)

Abstract

In this paper, the concept of α-quasi-convex functionalis introduced. The resonance theorem on a family of α-quasi-convex functionals is presented. Our results extending the corresponding ones in [6]－[13].

Keywords convex functional, linear topologic space, resonance theorem.