第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

E^n 空间中张角定理及其应用*

张 晗 方
(徐州师范大学数学系，江苏221009)

摘 要 本文利用单形的体积公式，得到了 n 维欧氏空间 E^n 中的张角定理，由此又证得了单形中的一组恒等式，利用这组恒等式给出了 Safta 猜想在 E^n 空间中的加强形式.

关键词 单形，张角定理，恒等式，Safta 猜想.

分类号 AMS(1991) 51K05/CCL O184

众所周知，平面上的张角定理指的是[3]：

自点 P 发出的三条射线 PA,PB,PC，使 $\angle APC=\alpha,\angle CPB=\beta,\angle APB=\alpha+\beta<180°$，则 A,B,C 三点共线的充要条件是

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}. \tag{1}$$

那么，在 n 维欧氏空间 E^n 中是否也有类似的张角定理存在呢？回答是正面的，如下首先给出

引理 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的单形，$\mathscr{A}$ 的顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$，若记 $|A_{n+1}A_i|=a_i$，且 $\mathscr{A}$ 的 n 维体积为 V，$\angle A_iA_{n+1}A_j=\alpha_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$，则

$$V=\frac{1}{n!}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\sin A_{n+1}, \tag{2}$$

其中

$$\sin^2A_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & & \cos\alpha_{ij} & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & \cos\alpha_{ji} & & 1\end{vmatrix}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j).$$

证明 若设 $|A_iA_j|=a_{ij}$(当 $i=n+1$ 时，记 $a_{n+1,j}=a_j$)，则有[1]

$$V^2=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot n!^2}\cdot D, \tag{3}$$

这里 D 为 $n+2$ 阶 Cayley—Menger 行列式：

* 1996年1月3日收到.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \boxed{a_{ij}^2} & \\ 1 & & & \end{vmatrix}.$$

现在将 D 中的第 2 行，第 3 行，…，第 $n+1$ 行分别减去第 $n+2$ 行，同样再将 D 中的第 2 列，第 3 列，…，第 $n+1$ 列分别减去第 $n+2$ 列，再按第 1 行与第 1 列展开，则利用通常的余弦定理可得

$$D = (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 2a_1 & & & 2a_i a_j \cos\alpha_{ij} \\ & 2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 2a_j a_i \cos\alpha_{ji} & & & 2a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & \cos\alpha_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\alpha_{ji} & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \sin^2 A_{n+1}.$$

将此代入(3)中便立即可得(2). □

由(2)可得如下的 n 维欧氏空间 E^n 中的张角定理，并且当 $n=2$ 时就是文前所述的(1).

定理 1 在 n 维欧氏空间 E^n 中，自点 O 发出的 $n+1$ 条射线 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n, OB_{n+1}$ 中任两条之间所夹的角均小于 180°，若 OB_{n+1} 位于 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ 的内部，记 $\langle OA_1, OA_2, \cdots, OA_n\rangle = \alpha$ 为 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ 所张成的 n 维空间角，同样，记 $\langle OA_1, OA_2, \cdots, OA_{i-1}, OB_{n+1}, OA_{i+1}, \cdots, OA_n\rangle = \alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{i-1}, OB_{n+1}, OA_{i+1}, \cdots, OA_n$ 所张成的 n 维空间角，则 $n+1$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_{n+1}$ 共 $n-1$ 维超平面的充要条件是

$$\frac{\sin\alpha}{OB_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i}{OA_i}. \tag{4}$$

证明 *必要性* 设 $n+1$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_{n+1}$ 共 $n-1$ 维超平面，由于 OB_{n+1} 位于 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$ 的内部，从而由 $n+1$ 个点 $O, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成 n 维欧氏空间 E^n 中的一个单形 $\mathscr{A}$，同样由 $n+1$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, B_{n+1}, A_{i+1}, \cdots, A_n$ 也构成 n 维欧氏空间 E^n 中的一个单形 $\mathscr{A}_i$，显然单形 $\mathscr{A}$ 被剖分为 n 个子块 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$，若设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}_i$ 的 n 维体积分别为 V 和 $V_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则由(2)知

$$V = \frac{1}{n!} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} OA_j\right) \cdot \sin\alpha, \quad V_i = \frac{1}{n!} \cdot OB_{n+1} \cdot \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{N} OA_j\right) \cdot \sin\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n).$$

由于 $V=\sum_{i=1}^{n}V_i$，故有 $\frac{1}{n!}\cdot(\prod_{j=1}^{n}OA_j)\cdot\sin\alpha=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n!}\cdot OB_{n+1}\cdot(\prod_{j=1,j\neq i}^{N}OA_j)\cdot\sin\alpha_i$. 在此等式的两端同除以 $\frac{1}{n!}\cdot OB_{n+1}\cdot(\prod_{j=1}^{N}OA_j)$ 便得 $\frac{\sin\alpha}{OB_{n+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\alpha_i}{OA_i}$. 故必要性得证.

如下再来证明充分性

设 $n+1$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B_{n+1}$ 为 E^n 中的 $n+1$ 个点，并设由这 $n+1$ 个点所支撑的 n 维单形的 n 维体积为 V'，则易知

$$\begin{aligned}V'&=V_{A_1A_2\cdots A_nB_{n+1}}\\&=V_{OA_1A_2\cdots A_n}-(V_{OB_{n+1}A_2\cdots A_n}+V_{OA_1B_{n+1}A_3\cdots A_n}+\cdots+V_{OA_1A_2\cdots A_{n-1}B_{n+1}})\\&=\frac{1}{n!}\cdot(\prod_{j=1}^{n}OA_j)\cdot\sin\alpha-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n!}\cdot OB_{n+1}\cdot(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}OA_j)\cdot\sin\alpha_i\\&=\frac{1}{n!}\cdot OB_{n+1}\cdot(\prod_{j=1}^{n}OA_j)\cdot\left(\frac{\sin\alpha_i}{OB_{n+1}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\alpha_i}{OA_i}\right)=0,\end{aligned}$$

即 $V_{A_1A_2\cdots A_nB_{n+1}}=0$，故 $n+1$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B_{n+1}$ 共 $n-1$ 维超平面，从而充分性也得证.

如下将给出张角定理(即定理 1)的一个应用.

定理 2 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的单形，$\mathscr{A}$ 的顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$，$P$ 为 $\mathscr{A}$ 内部的任意一点，A_iP 的延长线交 A_i 所对的 $n-1$ 维超平面于一点 B_i，又 A_iP 与 $n-1$ 维超平面 $\{B_1,B_2,\cdots,B_{i-1},B_{i+1},\cdots,B_{n+1}\}$ 的交点为 $C_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$，则有如下的一组恒等式

$$\frac{1}{A_iB_i}+\frac{n-1}{A_iC_i}=\frac{n}{A_iP}\quad(1\leqslant i\leqslant n+1).\tag{5}$$

证明 对于单形 $\mathscr{A}$ 来说，利用(4)可得

$$\frac{\sin A_i}{A_iB_i}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iA_j}.\tag{6}$$

设过 n 个点 $B_1,B_2,\cdots,B_{i-1},B_{i+1},\cdots,B_{n+1}$ 的超平面与 $\mathscr{A}$ 的棱 $A_iA_1,A_iA_2,\cdots,A_iA_{i-1},A_iA_{i+1},\cdots,A_iA_{n+1}$ 的交点为 $D_1,D_2,\cdots,D_{i-1},D_{i+1},\cdots,D_{n+1}$，对于单形 $\{D_1,D_2,\cdots,D_{i-1},A_i,D_{i+1},\cdots,D_{n+1}\}$ 来说，应用(4)可得

$$\frac{\sin A_i}{A_iC_i}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iD_j}.\tag{7}$$

(6)与(7)中三角函数符号内的 A_i 与 A_{ij} 分别表示 E^n 中过点 A_i 的 n 条射线 $A_iA_1,A_iA_2,\cdots,A_iA_{i-1},A_iA_{i+1},\cdots,A_iA_{n+1}$ 以及 $A_iA_1,A_iA_2,\cdots,A_iB_j,\cdots,A_iA_{n+1}(j\neq i)$ 所张成的 n 维空间角.

又对于单形 $\{D_1,D_2,\cdots,D_{i-1},A_i,D_{i+1},\cdots,D_{j-1},A_j,D_{j+1},\cdots,D_{n+1}\}(j\neq i)$ 再应用(4)又可得

$$\frac{\sin A_i}{A_iP}=\frac{\sin A_{ij}}{A_iA_j}+\sum_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}\frac{\sin A_{ik}}{A_iD_k}\quad(1\leqslant j\leqslant n+1,j\neq i),\tag{8}$$

(6)+(n−1)(7)−(8)，得

$$\begin{aligned}&\sin A_i\cdot\left(\frac{1}{A_iB_i}+\frac{n-1}{A_iC_i}-\frac{n}{A_iP}\right)\\&=\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iA_j}+(n-1)\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iD_j}-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iA_j}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\sum_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}\frac{\sin A_{ik}}{A_iD_k}\right)\end{aligned}$$

$$=(n-1)\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iD_j}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\sum_{k=1,k\neq i,j}^{n+1}\frac{\sin A_{ik}}{A_iD_k}$$

$$=(n-1)\cdot\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iD_j}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\frac{\sin A_{ij}}{A_iD_j}\right)=0.$$

显然 $\sin A_i\neq 0$,故 $\frac{1}{A_iB_i}+\frac{n-1}{A_iC_i}-\frac{n}{A_iP}=0(1\leqslant i\leqslant n+1)$. □

显然,若将定理 2 中的一组恒等式相加,便可得到如下的

推论 1　一切条件与定理 2 中的相同,则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{A_iB_i}+(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{A_iC_i}=n\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{A_iP}.\tag{9}$$

另外,对于(5)来说,它也可以表示为如下的形式:

推论 2　一切条件与定理 2 中的相同,则有一组恒等式:

$$n\cdot A_iC_i\cdot PB_i=(n-1)\cdot A_iP\cdot C_iB_i\quad(1\leqslant i\leqslant n+1).\tag{10}$$

证明　因为 $\frac{1}{A_iB_i}+\frac{n-1}{A_iC_i}=\frac{n}{A_iP}$,所以有 $A_iP\cdot(A_iC_i+(n-1)\cdot A_iB_i)=n\cdot A_iB_i\cdot A_iC_i$,即

$$n\cdot A_iB_i\cdot A_iC_i=A_iP\cdot A_iC_i+(n-1)\cdot A_iP\cdot A_iB_i,\quad(1\leqslant i\leqslant n+1),$$

由此式便可得

$$\begin{aligned}n\cdot A_iC_i\cdot PB_i&=n\cdot A_iC_i\cdot(A_iB_i-A_iP)=n\cdot A_iC_i\cdot A_iB_i-n\cdot A_iC_i\cdot A_iP\\&=A_iP\cdot A_iC_i+(n-1)\cdot A_iP\cdot A_iB_i-n\cdot A_iC_i\cdot A_iP\\&=(n-1)\cdot A_iP\cdot A_iB_i-(n-1)\cdot A_iP\cdot A_iC_i\\&=(n-1)\cdot A_iP\cdot(A_iB_i-A_iC_i)=(n-1)\cdot A_iP\cdot C_iB_i.\end{aligned}$$ □

定理 3　一切条件仍与定理 2 中的相同,则有

$$\prod_{i=1}^{n+1}\frac{A_iC_i}{C_iB_i}\geqslant(n-1)^{n+1},\tag{11}$$

当且仅当点 P 为单形 $\mathscr{A}$ 的重心时等号成立.

证明　设点 P 的重心规范坐标为 $P(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$,则易知 $\lambda_i=\frac{PB_i}{A_iB_i}(1\leqslant i\leqslant n+1)$. 由于 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}=1$,则由 $A.M.\geqslant G.M.$,可得

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\lambda_j&=(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{n+1})(\lambda_1+\lambda_3+\cdots+\lambda_{n+1})\cdots(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\\&\geqslant n\cdot\left(\prod_{j=2}^{n+1}\lambda_j\right)^{\frac{1}{n}}\cdot n\cdot\left(\prod_{j=1,j\neq 2}^{n+1}\lambda_j\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\cdots\cdot n\cdot\left(\prod_{j=1,j\neq n+1}^{n+1}\lambda_j\right)^{\frac{1}{n}}\\&=n^{n+1}\cdot\prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i,\end{aligned}$$

即

$$\prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\lambda_j\geqslant n^{n+1}\cdot\prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i,\tag{12}$$

显然等号成立的充要条件是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n+1}=\frac{1}{n+1}$,即点 P 为单形 $\mathscr{A}$ 的重心.

从而利用恒等式(10)和(12)可得

$$\prod_{i=1}^{n+1}\frac{A_iC_i}{C_iB_i}=\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{A_iP}{PB_i}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}\cdot\prod_{i=1}^{n+1}\frac{A_iB_i-PB_i}{PB_i}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{\lambda_i}-1\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n+1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j}{\lambda_j}-1\right]$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n+1}\lambda_j}{\prod_{i=1}^{n+1}\lambda_i} \geqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \cdot n^{n+1} = (n-1)^{n+1}.$$

至于等号成立的充要条件由(12)中的等号成立的充要条件立即可得. □

推论3　条件与定理2中的相同,则有

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_iC_i}{C_iB_i} \geqslant n^2 - 1, \tag{13}$$

当且仅当点 P 为单形 $\mathscr{A}$ 的重心时等号成立.

实际上,由(11)利用 $A.M. \geqslant G.M.$ 便立即可得(13).

在(13)中取 $n=2$时便是 Safta 于1981年所提出的猜想[2]. 故(13)为 Safta 猜想的一般形式,而(11)则为 Safta 猜想在 n 维欧氏空间 E^n 中的加强形式.

若取由顶点集$\{B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}\}$所支撑的单形 $\mathscr{B}$ 为坐标单形,且点 P 关于坐标单形 $\mathscr{B}$ 的重心规范坐标为 $P(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n+1})$,则易知 $\mu_i = \frac{PC_i}{C_iB_i}(1 \leqslant i \leqslant n+1)$. 则由 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n+1} = 1$以及延用定理3中的证法,容易证得

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{PB_i}{C_iB_i} \geqslant n^{n+1}, \tag{14}$$

当且仅当点 P 为 $\mathscr{B}$(或 $\mathscr{A}$)的重心时等号成立.

从而利用恒等式(10)与不等式(14)便可得到如下的

推论4　条件仍然与定理2中的相同,则 $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{A_iC_i}{A_iP} \leqslant \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{n+1}$,当且仅当点 P 为单形 $\mathscr{A}$ 的重心时等号成立.

参 考 文 献

1　Blumenthal L M. *Theory and Applications of Distance Geometry*. Oxford, 1959, 98～99

2　Safta I. Problem C:14, Gaz. Mat(Bucharest), 1981, **86**: 224

3　张景中. 面积关系帮你解题. 上海教育出版社, 1982, 20～21

Spread Angle Theorem in E^n and Its Application

Zhang Hanfang

(Dept. of Math., Xuzhou Normal Univ., Jiangsu 221009)

Abstract

In this paper, we use the volume formula of simplex, obtain the spread angle theorem in the n-dimensional Euclideam space E^n, thus proving some identities for a simplex and obtaining a sharpening form of Safta's conjecture in E^n.

Keywords　simplex, spread angle theorem, identity, Safta's conjecture.