第19卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 19 No. 1
1999年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb 1999

分片代数曲线交点的结式求法*

王文举
(首都经贸大学经济信息管理系，北京100026)

王仁宏　刘秀平
(大连理工大学数学科学研究所，116024)

摘　要　本文对确定分片代数曲线的二元样条函数的整体表达式中的截断引入参数表示，给出了分片代数曲线交点的结式求法. 理论与实例表明，这种算法是有效的.

关键词　二元样条函数，分片代数曲线，结式.

分类号　AMS(1991) 65D/CCL O174.42

1 引　言

分片代数曲线是代数曲线的推广、丰富和发展. 多年前，王仁宏[1]为了研究多元样条函数插值结点组的适定性问题，引入了分片代数曲线，曾得到插值结点组是多元样条函数插值的适定结点组的充分必要条件是这些结点不同时位于同一分片代数曲线上. 因此为了研究多元样条函数的插值问题，有必要进一步研究分片代数曲线.

此外，曲线求交及光滑拼接，求等高线等是CAGD中的基本问题. 而CAGD中的大量的曲线类型是样条曲线，因此如何给出两条样条曲线交点的求法是CAGD中的重要问题之一. 而这一问题的实质就是求分片代数曲线的交点.

今知，结式在求代数曲线的交点，判别多项式有无公因子，以及求解代数簇等诸多方面起了重要的作用，是一种简单而又行之有效的消元算法. 本文把这种方法应用到求分片代数曲线的交点上.

2 原　理

设 D 是 R^2 中的一个单连通区域，今用有限条不可约代数曲线对 D 作剖分 Δ，于是 D 被剖分成有限个胞腔 $D_1,\cdots,D_r$. 若 D 上的函数 f 限制在 Δ 的每个胞腔 D_i 上为一 k 次多项式 $P_i\in R[x,y]$，则称 f 为 D 上关于剖分 Δ 的具有 μ 阶光滑度的分片 k 次多项式函数，所有这样的函数构成的线性空间记为 $S_k^\mu(\Delta)$.

以 D_1 作为源胞腔，作一流线 $\vec{c}$(参见[1])，则任一 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 可以唯一地表为

$$f(x,y)=p(x,y)+\sum_{\vec{c}}[l_{i,j}(x,y)]_*^{\mu+1}q_{i,j}(x,y),$$

* 1996年6月10日收到.
辽宁省博士起动基金资助项目.

其中 $p(x,y)$ 为 $s(x,y)$ 在源胞腔上的表达式，$\sum_{\vec{c}}$ 表示对所有本性内网线求的和，而且沿 $\vec{c}$ 越过本性内网线 $\Gamma_{i,j}:l_{i,j}(x,y)=0$ 的光滑余因子为 $q_{i,j}(x,y)$，它们满足多元样条的协调方程

$$[l_{i,j}(x,y)]_*^m=\begin{cases}[l_{i,j}(x,y)]^m, & (x,y)\in f_r(\Gamma_{i,j}),\\ 0, & (x,y)\in D-f_r(\Gamma_{i,j}).\end{cases}$$

定义 1 设 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$，则称

$$S=\{(x,y)\in D: s(x,y)=0\}$$

为(平面)分片代数曲线.

分片代数曲线不仅依赖于定义它的样条函数，而且依赖于剖分，在某些胞腔上可能为空集. 因此研究分片代数曲线是非常困难的. 王仁宏、施锡泉、赵国辉[2,3]研究了分片代数曲线的交点个数，即所谓的 Bezout 数问题，得到了一些结果. 本文利用多元样条函数的整体表达式，对其截断参数化，给出用结式求分片代数曲线交点的具体求法.

对于给定的区域 D 及其剖分 Δ 和流线 $\vec{c}$，引入参数

$$c_{i,j}=\begin{cases}1, & (x,y)\in f_r(\Gamma_{i,j}),\\ 0, & (x,y)\in D-f_r(\Gamma_{i,j}),\end{cases}$$

则 $s(x,y)\in S_k^\mu(\Delta)$ 可表为

$$f(x,y)=p(x,y)+\sum_{\vec{c}}c_{i,j}[l_{i,j}(x,y)]^{\mu+1}q_{i,j}(x,y).$$

设 $s(x,y)\in S_{k_1}^{\mu_1}(\Delta)$，$t(x,y)\in S_{k_2}^{\mu_2}(\Delta)$，则有表示

$$s(x,y)=p(x,y)+\sum_{\vec{c}}c_{i,j}[l_{i,j}(x,y)]^{\mu_1+1}p_{i,j}(x,y),$$

$$t(x,y)=q(x,y)+\sum_{\vec{c}}c_{i,j}[l_{i,j}(x,y)]^{\mu_2+1}q_{i,j}(x,y).$$

将 $s(x,y)$ 和 $t(x,y)$ 按 y 降幂排列，则有

$$s(x,y)=\sum_{m=0}^{\bar{k}_1}a_m(x,c_{i,j})y^m,\quad t(x,y)=\sum_{n=0}^{\bar{k}_2}b_n(x,c_{i,j})y^n,$$

其中 $\bar{k}_1,\bar{k}_2$ 分别是 $s(x,y),t(x,y)$ 关于 y 的最高次数，$a_m(x,c_{i,j}),b_n(x,c_{i,j})$ 是关于 x 和 $c_{i,j}$ 的函数.

定义 2 样条函数 $s(x,y)$ 和 $t(x,y)$ 关于 y 的 Sylvester 矩阵定义为：

$$M_y(s,t)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccccccc}a_{\bar{k}_1} & a_{\bar{k}_1-1} & \cdots & a_0 & & & & \\ & a_{\bar{k}_1} & a_{\bar{k}_1-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & a_{\bar{k}_1} & a_{\bar{k}_1-1} & \cdots & a_0 & \\ b_{\bar{k}_2} & b_{\bar{k}_2-1} & \cdots & b_0 & & & & \\ & b_{\bar{k}_2} & b_{\bar{k}_2-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & b_{\bar{k}_2} & b_{\bar{k}_2-1} & \cdots & b_0 & \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\bar{k}_2\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\bar{k}_1\end{array},$$

$M_y(s,t)$ 的行列式称为 $s(x,y)$ 和 $t(x,y)$ 关于 y 的 Sylvester 结式. 记为

$$\mathrm{Res}_y(s,t):=\det(M_y(s,t)).$$

定理 存在两个样条函数 $f(x,y)$,$g(x,y)$,使得

$$\mathrm{Res}_y(s,t) = f(x,y)s(x,y) + g(x,y)t(x,y).$$

证明 对每个 $1 \leqslant i \leqslant k_1 + k_2$,把 $\mathrm{Res}_y(s,t)$ 的第 i 列乘以 $y^{k_1+k_2-i}$ 后,都加到最后一列,最后一列变为 $y^{k_2-1}s(x,y), y^{k_2-2}s(x,y), \cdots, s(x,y), y^{k_1-1}t(x,y), y^{k_1-2}t(x,y), \cdots, t(x,y)$,把得到的行列式按最后一列展开,提出相同的表达式 $s(x,y)$,$t(x,y)$,则有 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$,使得

$$\mathrm{Res}_y(s,t) = f(x,y)s(x,y) + g(x,y)t(x,y). \qquad \#$$

由此定理可知

推论 若 (x_0,y_0) 是 $s(x,y)=0$ 与 $t(x,y)=0$ 的交点,则 x_0 一定是 $\mathrm{Res}_y(s,t)$ 的零点.

据此可以给出分片代数曲线交点的结式求法.

3 算 法

第一步:对于给定的区域 D,剖分 Δ 和流线 $\vec{c}$,在本性内网线 $\Gamma_{i,j}: l_{i,j}(x,y)=0$ 处引入参数

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & (x,y) \in f_r(\Gamma_{i,j}), \\ 0, & (x,y) \in D - f_r(\Gamma_{i,j}); \end{cases}$$

第二步:对于 $s(x,y) \in S_{k_1}^{\mu_1}(\Delta)$,$t(x,y) \in S_{k_2}^{\mu_2}(\Delta)$ 的整体表达式参数表达后,按 y 降幂排列为:

$$s(x,y) = \sum_{m=0}^{k_1} a_m(x,c_{i,j})y^m, \quad t(x,y) = \sum_{n=0}^{k_2} b_n(x,c_{i,j})y^n;$$

第三步:求 $s(x,y)$ 和 $t(x,y)$ 关于 y 的 Sylvester 结式 $\mathrm{Res}_y(s,t)$,是一关于 x 和 $c_{i,j}$ 的多项式;

第四步:根据 $c_{i,j}$ 的不同情况,求得相应结式的零点,代入原样条函数,从而求得分片代数曲线的交点.

4 例 子

就几种特殊的剖分来说明分片代数曲线交点的结式求法.

1. 设 Δ 是 R^2 的“十字”剖分,在此剖分下 $S_k^\mu(\Delta)$ 中的样条函数 $s(x,y)$ 可表为

$$s(x,y) = p(x,y) + x_+^{\mu+1}p_1(x,y) + y_+^{\mu+1}p_2(x,y).$$

引入参数 A,B,

$$A = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}$$

则 $s(x,y)$ 可以表为

$$s(x,y) = p(x,y) + Ax^{\mu+1}p_1(x,y) + By^{\mu+1}p_2(x,y). \tag{1}$$

对于两个这样的样条函数 $s(x,y)$,$t(x,y)$,象上面那样引入参数 A,B 后,均可表为(1)的形式,然后按 y 降幂排列,求出 $s(x,y)$,$t(x,y)$ 的关于 y 的结式 $\mathrm{Res}_y(s,t)$.然后根据 A,B 的取值情况,求出相应结式的零点,代入原方程,从而求出分片代数曲线的交点.

2. 设 Δ 是 R^2 的矩形剖分，在此剖分下 $S_k^\mu(\Delta)$ 中的样条函数 $s(x,y)$ 可表为

$$s(x,y)=p(x,y)+\sum_{i=1}^{m}(x-x_i)_+^{\mu+1}A_i(x,y)+\sum_{j=1}^{n}(y-y_j)_+^{\mu+1}B_j(x,y)+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x-x_i)_+^{\mu+1}(y-y_j)_+^{\mu+1}C_{i,j}(x,y),$$

其中 $A_i,B_j,C_{i,j}$分别是 $k-\mu-1,k-\mu-1,k-2\mu-2$ 次多项式.

引入参数 $a_i,b_j,c_{i,j},i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$,

$$a_i=\begin{cases}1, & x>x_i,\\ 0, & x\leqslant x_i,\end{cases}\quad b_j=\begin{cases}1, & y>y_j,\\ 0, & y\leqslant y_j,\end{cases}\quad c_{i,j}=\begin{cases}1, & x>x_i,y>y_j,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则 $s(x,y)$可以表为

$$s(x,y)=p(x,y)+\sum_{i=1}^{m}a_i(x-x_i)^{\mu+1}A_i(x,y)+\sum_{j=1}^{n}b_j(y-y_j)^{\mu+1}B_j(x,y)+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{i,j}(x-x_i)^{\mu+1}(y-y_j)^{\mu+1}C_{i,j}(x,y).$$

对于两个这样的样条函数 $s(x,y),t(x,y)$，参数化后，按 y 降幂排列，计算出结式 $\mathrm{Res}_y(s,t)$，针对参数的取值情况，求出相应结式的零点，从而求出分片代数曲线的交点.

3. 下面给出一个具体例子的求法：

$$\begin{cases}s(x,y)=x^2+xy+2x+y-1=0,\\ t(x,y)=x^2-y^2+3x_++2y-1=0.\end{cases}$$

引入参数

$$a=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

可表为

$$\begin{cases}s(x,y)=x^2+xy+2x+y-1=0,\\ t(x,y)=x^2-y^2+3ax+2y-1=0.\end{cases}$$

按 y 降幂排列为

$$\begin{cases}(x+1)y+(x^2+2x-1)=0,\\ -y^2+2y+(x^2+3ax-1)=0,\end{cases}$$

$$\mathrm{Res}_y(s,t)=\begin{vmatrix}x+1 & x^2+2x-1 & 0\\ 0 & x+1 & x^2+2x-1\\ -1 & 2 & x^2+3ax-1\end{vmatrix}$$

$$=(3a-4)x^3+(6a-8)x^2+3ax.$$

当 $x>0$ 时，$a=1$，解 $\mathrm{Res}_y(s,t)=-x^3-2x^2+3x=0$ 得 $x(x-1)(x+3)=0$，即 $x_1=1$，这时 $y_1=-1$.

当 $x\leqslant 0$ 时，$a=0$，解 $\mathrm{Res}_y(s,t)=-4x^3-8x^2=0$ 得 $2x^2(x+2)=0$，即 $x_2=0,x_3=-2$，这时相应 $y_2=1,y_3=-1$. 故这两条分片代数曲线的交点为$(-2,-1),(0,1),(1,-1)$.

5 说 明

1. 这种方法求解交点时，是把样条函数作为一个整体函数来考虑的. 以往求分片代数曲线的交点时，是一片一片地求解，我们这样处理体现出整体时，可大大地减少计算量.

2. 结式有许多种求法，好的方法会减少计算量.

3. 这一方法能否推广到求解高维空间中的分片代数簇上，是我们正在讨论的问题.

参 考 文 献

1 王仁宏等. 多元样条函数及其应用. 科学出版社，1994.

2 Wang, R. H. and Zhao, G. H. *Intersection and local branch of piecewise algebraic curves*. Intern. Conf. Numer. Approx. and Appl. Daiian, Aug., 1995, 14～18

3 Shi, X. Q. and Wang, R. H. *Bezout's number of piecewise algebraic curves*. Intern. Conf. Numer. Approx. and Appl. Dalian, Aug., 1995, 14～18

4 Collins, G. E. *The calculation of multivariate polynomial resultants*. J. ACM. 1971, 18(4): 515～522

5 David Cox. *John Little and Donal O'Shea*. Ideals, Varieties and Algebraic Geometry and commutative Algebra, Springer-Verlag, 1992.

Resultant Algorithm for the Intersection Points of Piecewise Algebraic Curves

Wang Wenju

(Capital University of Economics and Business, Beijing 100026)

Wang Renhong　Liu Xiuping

(Inst. of Math. Sci., Dalian University of Technology, 116024)

Abstract

The resultant algorithm for computing the intersection points of piecewise algebraic curves is presented by using the structure of bivariate spline functions in this paper.

Keywords　piecewise algebraic curve, spline function, resultant.