第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

利用图的完形刻画wsr1条件*

武 同 锁
(上海交通大学应用数学系，上海 200030)

摘 要 本文证明了：对于拟投射右R-模M，$\mathrm{End}_R(M)$满足wsr1条件(即弱的stable range one条件)当且仅当M_R是T-投射模；wsr1条件是左右对称的；对于von Neumann正则环R，R满足wsr1条件当且仅当R为单侧幺正则环.

关键词 wsr1条件，图完形，T-投影模.
分类号 AMS(1991) 16A30/CCL O153

依照[1]，称一个环R满足wsr1条件(记为$R\in\mathrm{wsr1}$)，指的是对于R中满足$ab+c=1$的元素a,c，存在R的元素d与左可逆元u，使得或者$au+cd=1$，或者$a+cd=u$. 在[1]中从外部刻画了何时$\mathrm{End}_R(M)\in\mathrm{wsr1}$. 在[2]中讨论了正则环的wsr1条件及与模的弱消去问题的关系. 本文受[3]的启发，用图的完形从内部刻画wsr1条件.

本文中所有的环均有单位元，正则环为von Neumann正则环. 模为右酉模，模同态写在模元素的左侧.

1 wsr1条件

在本节中先给出关于wsr1条件的几个结果：

定理1 环R满足wsr1条件，当且仅当R的反环R^0满足wsr1条件. 换句话说，wsr1条件是左右对称的.

证明 设R满足wsr1条件，并设在R中有$ab+c=1$. 若有$x\in R$及左可逆元u使得$au+cx=1$，设$vu=1$. 则$a+cxv$为R的右可逆元. 于是$R\in\mathrm{wsr1}\Leftrightarrow$对于任意的$ab+c=1$，存在$y\in R$使得$a+cy$为单侧可逆元.

对于$ab+c=1$，设有$y\in R$，使得$w=a+cy$左可逆. 设$w'w=1$. 此时命$t=b+(1-by)w'c$，$s=a+y(1-ba)$. 则有：

$$ts=ta+ty(1-ba)=[ba+(1-by)w'ca]+[by(1-ba)+(1-by)w'(w-a)(1-ba)]$$
$$=ba+(1-by)w'ca+1-ba+(1-by)w'ca=1.$$

亦即$b+y'c$右可逆. 如果w右可逆且$ww'=1$，则同样可知有y''使得$b+y''c$左可逆. 这就证明

* 1996年2月13日收到.
国家自然科学基金资助课题.
E-mail address: wutsc@online.sh.cn

了 $R^0 \in \mathrm{wsr1}$.

由于$(R^0)^0=R$,故若 $R^0\in \mathrm{wsr1}$,则由上面证明即得到了 $R\in \mathrm{wsr1}$. □

在[2]中,称 R 为 qu-正则环,指的是对于 R 中任意元素 x,存在左可逆元 u 及一个元素 y,使得 $x=xux$ 或者 $x=xyx=xyu$;并证明了对于正则环 R,$R\in \mathrm{wsr1} \Leftrightarrow R$ 为 qu-正则环. 如果对于 R 中任一元 x,存在单侧可逆元 u,使得 $x=xux$,则称 R 为单侧幺正则环[4].

定理 2 对于正则环 R,以下几条是等价的:

(1) R 满足 wsr1 条件;

(2) R 为 qu-正则环;

(3) R 为单侧幺正则环.

证明 由于(3)⇒(2)明显,故只需证明(2)⇒(3).

设 $x=xyx=xyu$,其中 $vu=1$. 命题 $w=yxy+v-yxv$,则有 $wu=yxyu-yx+1=1$,即 w 右可逆,而

$$xwx=-xyxvx+xvx+xyxyx=x.$$

这就证明了 R 为单侧幺正则环⇔R 为 qu-正则环. □

命题 3 设 R 为单侧幺正则环,I 为 R 的理想,S 为 R 的包含 I 的子环. 则 S 为单侧幺正则环当且仅当 S/I 为单侧幺正则环.

证明 由于正则环的理想为正则理想,所以可以假设 S 为正则环. 根据[2,命题 3.2],欲证 S 为单幺正则环,只须证明:对于 $e^2=e\in I$,$f^2=f\in S$,$(1-e)S\cong(1-f)S$ 蕴含了 ef 与 fS 之间存在单同态.

如果 $f\in I$,则由[2]的命题 3.2 及 $I\subseteq S$ 易于看出. 如果 $f\notin I$,则 $f\notin ReR$. 于是由正则环性质知 fR 不同构于 eR 的子模. 据[2]的命题 3.2,有 $eR\rightarrow fR$. 此时有

$$eS=eI\cong eR\otimes_R I\rightarrow fR\otimes_R I\cong fI\subseteq fS,$$

即 eS 到 fS 有 S-模单同态. □

命题 3 可用来从已知的单侧幺正则环出发构作新的单侧幺正则环.

2 T-投射模与 wsr1 条件

依照[5],模 P 称为拟投射模,如果对于任意的满同态 $f:P\rightarrow M$,及任意的模同态 $g:P\rightarrow M$,存在 $h:P\rightarrow P$ 使得有 $g=fh$. 投射模当然是拟投射的.

定义 1 称模 P 为 T-投射模,是指对于任意的满同态

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dash, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & P \arrow[dl, "g"] \\ & M & \end{tikzcd},$$

存在满同态 $h\in \mathrm{End}_R(P)$,使得它可把上图补成交换图(即有 $g=fh$ 或 $f=gh$).

引进这一概念的主要目的是为了刻画 wsr1 条件. 下面证明本文的主要结论:

定理 4 对于拟投射模 P,记 $E=\mathrm{End}_R(P)$. 则下述几个条件等价:

(1) E 满足 wsr1 条件.

(2) P_R 为 T-投射模.

(3) E 作为右 E-模为 T-投射模.

证明 (1)⇒(2) 设 $E\in \mathrm{wsr}1$. 设有满同态

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "f"'] & M\cong P/\ker(f), \end{tikzcd}$$

则由 P 的拟投射性,存在 $h\in \mathrm{End}_R(P)$,使上图成为交换图,则有 $P=\mathrm{im}(h)+\ker(f)$. 此时考虑图

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "\pi h"'] & P/\ker(f), \end{tikzcd}$$

其中 π 为自然同态. 由拟投射性质,知存在 $\alpha\in \mathrm{End}_R(P)$,使 $\pi=\pi(h\alpha)$. 此时

$$\mathrm{im}(1-h\alpha)\subseteq \ker(f),$$

于是得到

$$h\alpha+(1-h\alpha)=1_E,\ h,\alpha\in E.$$

因为 $E\in \mathrm{wsr}1$,故有 $\beta\in E$,使得 $h+(1-h\alpha)^{\beta}$ 单侧可逆. 设 $\varphi=h+(1-h\alpha)\beta$,则 $f\varphi=fh=g$,其中 φ 为可裂单或满的同态. 这就证明了 P_R 为 T-投射模.

(2)⇒(1) 设 P 为 T-投射的拟投射模. 设在 E 中有 $f+gk=1$. 此时考虑

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "\pi g"'] & P/\mathrm{im}(f) \end{tikzcd}$$

其中 π 仍为自然满同态. 于是由 P 的 T-投射性,存在可裂单或满的同态 h 使得 $\pi=\pi(gh)$. 于是有:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "1-gh"] \\ P \arrow[r, "f"'] & \mathrm{im}(f) \end{tikzcd}$$

再由 P 的拟投射性即得到 $\alpha\in E$,使得 $1+gh=f\alpha$,其中 h 为 E 的单侧可逆元. 这就证明了

$$E\in \mathrm{wsr}1.$$

(1)⇔(3) 取 $R=E,P=E$,则由(1)⇔(2)即得. □

推论 1 对于任意环 R,以下几条等价:

(1) R 满足 wsr1 条件.

(2) R 作为右 R-模为 T-投射模.

(3) R 作为左 R-模为 T-投射模.

证明 由定理 4 及定理 1 得到.

注 1 如果记定义 1 的对偶为 T^0,则相应于定理 4 的结果仍是成立的. 故而对于右自内射环 R,$R\in \mathrm{wsr}1\Leftrightarrow R$ 作为右 R-模为 T^0-模.

参 考 文 献

1 Wu Tongsuo. *Weak cancellation of modules and wsr1 condition*. 南京大学学报数学半年刊, 1994, 11(2): 109～116

2 武同锁. 模的弱消去问题与qu-正则环. 数学学报, 1995, **38**(6): 746～751

3 Canfell M J. *Completion of diagrams by automorphisms and Bass first stable range condition*. J. of Algebra, 1995, **176**: 480～503

4 Ehrlich G. *Units and one-sided units in regular rings*. Trans. of Amer. Math. Soc., 1976, **261**: 81～90

5 Anderson F W, Fuller K R. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

6 Wu Tongsuo. *On the stable range of endomorphism rings of quasi-projective modules*. Comm. in Algebra, 1998, **26**: 139～146

Characterizing wsr1 Condition by Completions of Diagrams

Wu Tongsuo

(Dept. of Appl. Math., Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030)

Abstract

We prove that for a right quasi-projective R-module M, $\mathrm{End}_R(M)$ satisfies wsr1 condition if and only if M is a T-projective module. We prove that wsr1 condition is left-right symmetric. For von Neumann regular ring R, R satisfies wsr1 if and only if R is one-sided unit regular.

Keywords wsr1 condition, T-projectivity, completion of diagram.