第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

# 非线性约束最优化一族超线性收敛的可行方法*

简金宝 薛声家
(西安交通大学理学院，西安710049) (暨南大学企业管理系，广州510632)
(广西大学理学院，南宁530004)

**摘 要** 本文建立求解非线性不等式约束最优化一族含参数的可行方法.算法每次迭代仅需解一个规模较小的二次规划.在一定的假设条件下,证明了算法族的全局收敛性和超线性收敛性.

**关键词** 非线性约束,最优化,序列二次规划,可行方法,全局收敛,超线性收敛.

**分类号** AMS(1991) 90C30/CCL O221.2

## 0 引 言

对于非线性约束最优化问题,序列二次规划(SQP)技术是一种很有效的方法,因为它具有快速收敛的特点.遗憾的是,早期的SQP方法所产生的点列通常是不可行的,不能满足某些实际优化问题对近似最优方案可行性的严格要求.一般的可行方向法产生的点列虽然满足可行性要求,但收敛速度太慢.因此研究和建立快速收敛的可行方法具有重要理论和实际意义.文[1]所给出的二步超线性收敛的可行方法是一个优秀成果.然而该方法每次迭代需解3—4个二次规划问题以确定搜索方向,因而计算量大,结构复杂.本文吸取[1]的思想,并利用[8]中的转轴运算,建立了求解非线性不等式约束最优化的一族可行方法,其特点是每次迭代只需解一个二次规划就可确定搜索方向,且该二次规划的规模比通常的SQP方法要解的二次规划的规模要小,因此方法的结构简单,计算量小.当算法的参数取适当值时,可得到一系列有效的超线性收敛可行算法.

## 1 算 法

本文考虑如下非线性规划问题

$$(\mathrm{P})\quad \min\{f(x)\,|\,x\in R\},$$

其中 $R=\{x\in E^n\,|\,g_j(x)\leqslant 0,j=1,2,\cdots,m\}$,记 $L=\{1,\cdots,m\}$,对 $x\in R,\varepsilon>0$,记 $I(x)=\{j\in L\,|\,g_j(x)=0\}$,$I_\varepsilon(x)=\{j\in L\,|\,-g_j(x)\leqslant\varepsilon\}$,记 $N_I(x)=(\nabla g_j(x),j\in I)$,本文假设

($\mathrm{H}_1$) $f,g_j(j\in L)$为二阶连续可微函数,且 $R\neq\varnothing$;

* 1995年10月4日收到.1998年6月24日收到修改稿.
国家自然科学基金(19801009)和广西自然科学基金(9811023)资助项目.

$(H_2)$ $\forall x\in R$，向量组$\{\nabla g_j(x)\mid j\in I(x)\}$线性无关.

**算法具体步骤：**

步 0. 选参数：$M,\alpha_1,\bar{\delta}>0;\alpha_2\geqslant 0,\alpha\in(0,\frac{1}{2}),\gamma_1\geqslant\gamma_2>2,\sigma>2,\tau\in(2,3),\beta\in(0,1)$，任选 $x^0\in R$，对称阵 $H_0\in E^{n\times m}$，令 $k=0$.

步 1. 作转轴运算： 1.1) 令 $\delta=\bar{\delta}$.

1.2) 计算 $I=I_\delta(x^k)$，$D_k\triangleq\det(N_I(x^k)^TN_I(x^k))$.

1.3) 如 $D_k<\delta$，令 $\delta:=\frac{1}{2}\delta$，转到 1.2)；否则记 $\delta_k=\delta,N_k=N_{I_k}(x^k),I_k=I_{\delta_k}(x^k)$. 进入步 2.

步 2. 确定搜索方向.

2.1) 求以下二次规划的 K-T 点 $\bar{d}^k$，$\bar{\mu}^k$ 为相应的 K-T 乘子.

$$(QP)\quad \min\nabla f(x^k)d+\frac{1}{2}d^TH_kd$$

$$\text{s.t. } g_j(x^k)+\nabla g_j(x^k)^Td\leqslant 0,\ j\in I_k.$$

如(QP)无 K-T 点，或者 $\|\bar{d}^k\|>1$，转到 2.4). 如 $\bar{d}^k=0$，$x^k$ 为(P)的 K-T 点，停.

2.2) 计算 $Q_k=(N_k^TN_k)^{-1}N_k^T$，选取向量 $V^k=(V_j^k,j\in I_k)$，及参数 $\alpha_j^k,j\in I_k^0$，其中 $I_k^0=\{j\in I_k\mid g_j(x^k)+\nabla g_j(x^k)^T\bar{d}^k=0\}$，满足：

$-\|\bar{d}^k\|^{\gamma_2}\leqslant V_j^k\leqslant-\|\bar{d}^k\|^{\gamma_1},\forall\ j\in I_k$；当 $x^k\to x^*,k\in\mathscr{K}$ 时，$\{\alpha_j^k,j\in I_k^0\}_{k\in\mathscr{K}}$有界. 计算方向

$$d^k=\bar{d}^k+Q_k^T(V^k+\|\bar{d}^k\|\tilde{g}^k),\tag{1.1}$$

$$\tilde{g}^k=\alpha_j^kg_j(x^k),\forall\ j\in I_k^0;\quad \tilde{g}_j^k=0,\forall\ j\in I_k\backslash I_k^0.$$

2.3) 如 $\|d^k\|>M$，或者 $Q_k=\nabla f(x^k)^Td^k>\min\{-\|\bar{d}^k\|^\sigma,-\|d^k\|^\sigma\}$，转到 2.4)，否则按(1.2)计算方向 $\tilde{d}^k$，其中 $e=(1,\cdots,1)^T\in E^{|I_k|}$.

$$\tilde{d}^k=(Q_k^T(-\alpha_1\|d^k\|^\tau e-h^k),\ h_j^k=\begin{cases}g_j(x^k+d^k+\alpha_2\|d^k\|d^k),j\in I_k^0,\\0,j\in I_k\backslash I_k^0.\end{cases}\tag{1.2}$$

如 $\|\tilde{d}^k\|>\|d^k\|$，令 $\tilde{d}^k=0$，进入步 3.

2.4) 计算一个满足“一阶”可行下降条件的方向 $d^k$，令 $\theta_k=\nabla f(x^k)^Td^k,\tilde{d}^k=0$，进入步 3.

步 3. 作线搜索：求$\{1,\beta,\beta^2,\cdots\}$中满足(1.3)，(1.4)的最大值，并记其为 $t_k$.

$$f(x^k+td^k+t^2\tilde{d}^k)\leqslant f(x^k)+\alpha t\theta_k,\tag{1.3}$$

$$g_j(x^k+td^k+t^2\tilde{d}^k)\leqslant 0,\ \forall\ j\in L.\tag{1.4}$$

步 4. 利用某种修正公式校正 $H_k$ 得对称阵 $H_{k+1}$，令 $x^{k+1}=x^k+t_kd^k+t_k^2\tilde{d}^k,k:=k+1$，返回步 1.

“一阶”可行下降方向 $d^k$ 的性质及其产生方法参见文献[1].

**引理 1**[2] 步 1 中转轴运算可有限步终止，且当 $x^k\to x^*,k\in\mathscr{K}$ 时，存在 $\tilde{\delta}>0$，使 $\delta_k\geqslant\tilde{\delta}$，$\forall\ k\in\mathscr{K}$.

**引理 2**[1] 步 3 中线搜索一定可以执行，即存在 $j=j(k)$使得 $t_k=\beta^j$ 满足(1.3)和(1.4).

## 2 算法的全局收敛性

若算法有限步终止，则 $\bar{d}^k=0$，于是易证 $x^k$ 为(P)的 K-T 点，假设算法产生无穷点列 $\{x^k\}$.

**引理 3** 设 $x^k\to x^*, k\in\mathcal{K}$，且 $d^k,\tilde{d}_k(k\in\mathcal{K})$ 由步 2 中 2.2)和 2.3)确定，则 $\bar{d}^k\to 0, k\in\mathcal{K}$.

**证明** 若不然，则存在 $\varepsilon_1>0$ 及无穷子列 $\mathcal{K}'\subset\mathcal{K}$，使得 $1\geqslant\|\bar{d}^k\|\geqslant\varepsilon_1, k\in\mathcal{K}'$，不妨设 $I_k^0\equiv I^0, \forall\ k\in\mathcal{K}'$. 由(1.1)有

$$\nabla g_j(x^k)^T d^k = g_j(x^k)(\alpha_j^k\|\bar{d}^k\| - 1) + V_j^k,\ j\in I_k^0, \tag{2.1}$$

$$\nabla g_j(x^k)^T d^k \leqslant - g_j(x^k) + V_j^k,\ j\in I_k\backslash I_k^0. \tag{2.2}$$

由 2.2)及(2.1)，(2.2)，$V_j^k\leqslant -\|\bar{d}_k\|^{\gamma_1}$，$\{\alpha_j^k\}_{\mathcal{K}}$ 有界，易证存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\nabla f(x^k)^T d^k\leqslant -\varepsilon_0, \nabla g_j(x^k)^T d^k\leqslant -\varepsilon_0, \forall\ j\in I(x^*)$；$g_j(x^k)\leqslant -\varepsilon_0, \forall\ j\overline{\in} I(x^*), \forall\ k\in\mathcal{K}'$.

结合$(H_1)$和 $\{d^k,\tilde{d}^k\}$ 的有界性知，存在 $t_0>0$，使得 $t_k\geqslant t_0, \forall\ k\in\mathcal{K}'$. 故

$$f(x^{k+1})\leqslant f(x^k)+\alpha t_k\theta_k\leqslant f(x^k)-\alpha t_0\varepsilon_0, \forall\ k\in\mathcal{K}'.$$

由 $\{f(x^k)\}$ 的下降性及 $f(x^k)\to f(x^*)(k\in\mathcal{K})$ 知 $f(x^k)\to f(x^*)(k\to\infty)$. 于是在上式中令 $k\to\infty, k\in\mathcal{K}'$，有 $\alpha t_0\varepsilon_0\leqslant 0$，矛盾. 引理 3 成立. □

**定理 1** 设 $\{x^k\}_{k\in\mathcal{K}}$ 有界蕴含 $\{\|H_k\|\}_{k\in\mathcal{K}}$ 有界，则 $\{x^k\}$ 的任意聚点 $x^*$ 为(P)的 K-T 点.

**证明** 设 $x^k\to x^*, k\in\mathcal{K}$. 如有无穷多个 $k\in\mathcal{K}$ 使得 $d^k$ 由步 2 中的 2.4)确定，此时利用一阶可行下降条件可证 $x^*$ 为(P)的 K-T 点，参考[1].

不妨设 $d^k,\tilde{d}^k(k\in\mathcal{K})$ 均由步 2 中的 2.2)及 2.3)确定，且 $I_k^0\equiv I^0, \forall\ k\in\mathcal{K}$. 由引理 3 及假设有 $\bar{d}_k\to 0, H_k\bar{d}^k\to 0, k\in\mathcal{K}$. 又由 $\bar{d}^k$ 是(QP)的 K-T 点有

$$\nabla f(x^k) + \sum_{j\in I^0}\bar{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k) + H_k\bar{d}^k = 0, \bar{\mu}_j^k\geqslant 0, j\in I^0. \tag{2.3}$$

由$(H_1)$，$(H_2)$及(2.3)知 $\bar{\mu}_j^k\to\bar{\mu}_j^*\geqslant 0, j\in I^0, k\in\mathcal{K}$，且 $\nabla f(x^*) + \sum_{j\in I^0}\mu_j^*\nabla g_j(x^*) = 0, \mu_j^*\geqslant 0, I^0\subset I(x^*)$. 因此 $x^*$ 为(P)的 K-T 点.

## 3 算法的超线性收敛性

设 $L(x,u)=f(x)+\sum_{j\in L}u_j g_j(x)$，$\nabla^2 L(x,u)=\nabla^2 f(x)+\sum_{j\in L}u_j\nabla^2 g_j(x)$. 为获得超线性收敛性，进一步设

$(H_3)$ 点列 $\{x^k\}$ 具有满足二阶充分性条件和严格互补条件[1]的极限点 $x^*$，且 $\{x^k\}_{k\in\mathcal{K}}$ 有界蕴含 $\{\|H_k\|\}_{k\in\mathcal{K}}$ 有界.

**引理 4** 设$(H_1)-(H_3)$成立，则算法产生的点列 $\{x^k\}$ 收敛于(P)的严格局部最优解 $x^*$.

引理 4 的证明类似于[1]中命题 3.4，4.1，省略. 利用[4]中定理 1，类似于[1]中命题 4.2，有

**引理 5** 当 $k$ 充分大时，有

(1) (QP)有 K-T 点 $\bar{d}^k$；$\lim\limits_{k\to\infty}\bar{d}^k = 0$；(1.1) 式的 $d^k$ 使得

$\lim\limits_{k\to\infty}d^k = 0$，且存在 $c_1,c_2>0$，使得 $c_1\|\bar{d}^k\|\leqslant\|d^k\|\leqslant c_2\|\bar{d}^k\|$.

(2) $I_k^0=\{j|\overline{\mu}_j^k>0,j\in I_k\}\equiv I(x^*)\overset{\triangle}{=}I^*$；$\lim\limits_{k\to\infty}\overline{\mu}_j^k=\overline{\mu}_j^*$. 其中 $\overline{\mu}_j^k,\mu_j^*$ 分别为 $\overline{d}^k$ 和 $x^*$ 的 K-T 乘子.

记 $R_k=(\nabla g_j(x^k),j\in I^*)$, $R_*=(\nabla g_j(x^*),j\in I^*)$, $P_k=E_n-R_k(R_k^TR_k)^{-1}R_k^T$, $P_*=E_n-R_*(R_*^TR_*)^{-1}R_*^T$. 则 $R_k\to R_*$, $P_k\to P_*$, $k\to\infty$. 进一步假设

($H_4$) $H_k\to H_*$, $k\to\infty$, 且 $H_*$ 在子空间 $\Omega=\{d\,|R_*^Td=0\}$ 上正定. 由($H_3$), ($H_4$)易见存在 $\rho>0$, 使得当 $k$ 充分大时,

$$d^TP_kH_kP_kd\geqslant\rho\|P_kd\|^2,\ \forall\ d\in E^n. \tag{3.1}$$

**引理 6** 存在 $\eta_1,\eta_2>0$, 使得 $k$ 充分大时有

(1) $\sum\limits_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k(1-\alpha_j^k\|\overline{d}^k\|)g_j(x^k)\leqslant-\eta_1[\sum\limits_{j\in I^*}g_j(x^k)^2]^{\frac{1}{2}}\overset{\triangle}{=}-\eta_1z_k$;

(2) $\|\widetilde{g}^k\|=O(\|\overline{d}^k\|)$.

(3) $\overline{d}^k=P_k\overline{d}^k+d_0^k$, $d_0^k$ 满足: $\|d_0^k\|=O(z_k)$, $\|d_0^k\|=O(\|\overline{d}^k\|)$.

**证明** 由 $\{\alpha_j^k\}$ 有界, $\overline{d}^k\to0$ 和 $\overline{\mu}_j^k\to\mu_j^*>0$, 易证(1), (2) 成立, 因 $\widetilde{g}_j^k=\alpha_j^kg_j(x^k)=-\alpha_j^k\nabla g_j(x^k)^T\overline{d}^k=O(\|\overline{d}^k\|)$. 又 $d_0^k=\overline{d}^k-P_k\overline{d}^k=R_k(R_k^TR_k)^{-1}R_k^T\overline{d}^k=-R_k(R_k^TR_k)^{-1}(g_j(x^k),j\in I^*)$. 于是(3)成立.

**引理 7** 存在 $\eta_3>0$, 使得 $k$ 充分大时有 $-(\overline{d}^k)^TH_k\overline{d}^k\leqslant\rho\|\overline{d}^k\|^2+O(z_k)$.

引理 7 的证明可直接利用引理 6 之(3)和(3.1)完成, 省略.

**引理 8** 存在 $\eta_4>0$, 使得 $k$ 充分大时, (1.1)式的 $d^k$ 满足: $\theta_k=\nabla f(x^k)^Td^k\leqslant-\eta_4\|d^k\|^2$.

**证明** 由 $\overline{d}^k$ 为(QP)之 K-T 点, 有

$$\begin{aligned}\theta_k=&\nabla f(x^k)d^k=-\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k)^Td^k-(d^k)^TH_k\overline{d}^k\\ =&\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k(1-\alpha_j^k\|\overline{d}^k\|)g_j(x^k)-\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^kV_j^k-(\overline{d}^k)^TH_k\overline{d}^k-\\ &(V^k+\|\overline{d}^k\|\widetilde{g}^k)^TQ_kH_k\overline{d}^k.\end{aligned}$$

由引理 6,7 及 $-\|\overline{d}^k\|^{\gamma_2}\leqslant V_j^k\leqslant-\|\overline{d}^k\|^{\gamma_1}$, $\gamma_1\geqslant\gamma_2>2$, 有

$$\theta_k\leqslant(-\eta_1+\eta_3\|\overline{d}^k\|)z_k-\rho\|\overline{d}^k\|^2+O(\|\overline{d}^k\|^{\gamma_2})+O(\|\overline{d}^k\|^3).$$

于是结合引理 5(1)可知引理 8 成立.

($H_5$) 设 $\|P_k(\nabla^2L(x^k,\overline{\mu}^k)-H_k)\overline{d}^k\|=o(\|\overline{d}^k\|)$.

**定理 2** 设($H_1$)-($H_5$)成立, 则 $k$ 充分大时, 方向 $d^k,\widetilde{d}^k$ 均由步 2 中的(1.1), (1.2)确定; 且步长 $t_k\equiv1$.

**证明** 先证如下命题

**命题** 当 $k$ 充分大时, (1.2)式的 $\widetilde{d}^k$ 满足: $\|\widetilde{d}^k\|=O(\|d^k\|^2)$.

**证明** 当 $j\in I^*=I_k^0$ 时, 利用引理 5(1), 由 $g_j(x^k)=-\nabla g_j(x^k)^T\overline{d}^k$ 及(1.1)有

$$\begin{aligned}h_j^k=&g_j(x^k+d^k+\alpha_2\|d^k\|d^k)=g_j(x^k+d^k)+\alpha_2\|d^k\|\nabla g_j(x^k+d^k)^Td^k+O(\|d^k\|^3)\\ =&g_j(x^k+d^k)+\alpha_2\|d^k\|(-g_j(x^k)+V_j^k+\alpha_j^k\|\overline{d}^k\|g_j(x^k))+O(\|d^k\|^3),\\ h_j^k=&g_j(x^k)+\nabla g_j(x^k)^Td^k+O(\|d^k\|^2)\\ =&V_j^k+\alpha_j^k\|\overline{d}^k\|g_j(x^k)+O(\|d^k\|^2)=O(\|d^k\|^2).\end{aligned}$$

因此由 $\tau\in(2,3)$，有 $\|\widetilde{d}^k\|=\|Q_k^T(-\alpha_1\|d^k\|^\tau e-h^k)\|=O(\|d^k\|^2)$.

由引理 5(1)，引理 8 及以上命题，注意到 $\sigma>2$，可知定理 2 的第一部分成立.

下证 $t_k\equiv1$. 对于 $j\in I^*$，由以上命题，有

$$g_j(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)=g_j(x^k+d^k)+\nabla g_j(x^k)^T\widetilde{d}^k+O(\|d^k\|^3)$$

由 $\nabla g_j(x^k)^T\widetilde{d}^k=-\alpha_1\|d^k\|^\tau-h_j^k$ 及(3.2)，有

$$\nabla g_j(x^k)^T\widetilde{d}^k\leqslant-\alpha_1\|d^k\|^\tau-g_j(x^k+d^k)+O(\|d^k\|^3),$$

$g_j(x^k)^T\widetilde{d}^k\leqslant-\alpha_1\|d^k\|^\tau+O(\|d^k\|^3)$，因 $\alpha_1>0,\tau\in(2,3)$，故 $k$ 充分大时，有 $g_j(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)\leqslant 0,\forall j\in I^*$. 再由 $g_j(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)\to g_j(x^*)<0,\forall j\notin I^*$，知：$g_j(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)\leqslant0,\forall j\in L$.

$$A_k\overset{\triangle}{=}f(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)-f(x^k)=\nabla f(x^k)^T(d^k+\widetilde{d}^k)+\frac{1}{2}(d^k)^T\nabla^2f(x^k)d^k+o(\|\overline{d}^k\|^2)$$

$$=\nabla f(x^k)^Td^k+\nabla f(x^k)^T\widetilde{d}^k+\frac{1}{2}(\overline{d}^k)^T\nabla^2f(x^k)\overline{d}^k+o(\|\overline{d}^k\|^2),$$

$$\frac{1}{2}\nabla f(x^k)^Td^k=-\frac{1}{2}(d^k)^TH_k\overline{d}^k-\frac{1}{2}\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k)^Td^k$$

$$=-\frac{1}{2}(\overline{d}^k)^TH_k\overline{d}^k-\frac{1}{2}\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^kg_j(x^k)+O(\|\overline{d}^k\|)[\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^kg_j(x^k)]-$$

$$\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k)^Td^k+o(\|\overline{d}^k\|^2).$$

易证 $\nabla f(x^k)^T\widetilde{d}^k=-\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k)^T\widetilde{d}^k+o(\|\overline{d}^k\|^2)$，故

$$A_k=\frac{1}{2}\theta_k-\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k)^T(d^k+\widetilde{d}^k)-\frac{1}{2}(\overline{d}^k)^T(\nabla^2f(x^k)-H_k)\overline{d}^k-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k(1+O(\|\overline{d}^k\|)g_j(x^k)+o(\|\overline{d}^k\|^2).$$

注意到 $g_j(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)=O(\|\overline{d}^k\|^\tau)+O(\|\overline{d}^k\|)g_j(x^k)$，利用 Taylor 展式有

$$-\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k\nabla g_j(x^k)^T(d^k+\widetilde{d}^k)=\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^kg_j(x^k)+\frac{1}{2}\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^k(\overline{d}^k)^T\times$$

$$\nabla^2g_j(x^k)\overline{d}^k+O(\|d^k\|^\tau)+O(\|\overline{d}^k\|)[\sum_{j\in I^*}\overline{\mu}_j^kg_j(x^k)]$$

$$A_k=\frac{1}{2}\theta_k+\frac{1}{2}\sum_{j\in I^*}[1+O(\|\overline{d}^k\|)]g_j(x^k)\overline{\mu}_j^k+$$

$$\frac{1}{2}(\overline{d}^k)^T(\nabla^2L(x^k,\overline{\mu}^k)-H_k)\overline{d}^k+o(\|\overline{d}^k\|^2).$$

利用($H_5$)及引理 6，有

$$(\overline{d}^k)^T(\nabla^2L(x^k,\overline{\mu}^k)-H_k)\overline{d}^k=o(\|\overline{d}^k\|^2)+o(z_k).$$

于是利用 $\theta_k\leqslant-\eta_4\|d^k\|^2\leqslant-\eta_5\|\overline{d}^k\|^2(\eta_5>0),\tau>2,\gamma_2>2$ 及引理 6，有

$$A_k-\alpha\theta_k\leqslant(\frac{1}{2}-\alpha)\theta_k+\frac{1}{2}\sum_{j\in I^*}(1+O(\|\overline{d}^k\|)\overline{\mu}_j^kg_j(x^k)+o(z_k)+o(\|\overline{d}^k\|^2)$$

$$\leqslant(\alpha-\frac{1}{2})\eta_5\|\overline{d}^k\|^2+o(\|\overline{d}^k\|^2)\leqslant0.$$

从而 $f(x^k+d^k+\widetilde{d}^k)\leqslant f(x^k)+\alpha\theta_k$. 综上所述有 $t_k\equiv1$.

**定理3** 在假设($H_1$)－($H_5$)下，§1中算法一步超线性收敛于(P)的严格局部最优解 $x^*$.

**注1** 可以采用诸如[8]中修正公式产生 $H_{k+1}$，此时($H_5$)成立.

**注2** 令 $\alpha_j^k\equiv 0,\alpha_1=1,\alpha_2=0,\gamma_1=\gamma_2$，可产生一类简便方法.

**注3** 当 $g_j(j\in L)$ 均为线性函数时，可建立更为简单的超线性收敛方法[6,7].

## 参 考 文 献


1 Panjer E R. Tits A L. *A superlinearly convergent feasible method for the solution of inequality constrained optimization problems.* SIAM J. Control and Optimization, 1987, **25**(4): 934~950

2 堵丁柱. 非线性约束条件下的梯度投影方法. 应用数学学报, 1985, **8**(1): 7~16

3 Polak E, Trahan R, Mayne D Q. *Combined phase* I*-phase* II *methods of feasible directions.* Mathematical Programming, 1979, 17: 32~61

4 Robinson S M. *Perturbed Kuhn-Tucker points and rates of convergence for a class of nonlinear programming algrothms.* Mathematical Programming, 1974, **7**: 1~16

5 Powell M J D. *The convergence of variable metric method for nonlinearly constrained optimization calculations.* In Nonlinear Programming 3. O. L. Mangasarian, R. R. Meyer and S. M. Robinson, eds., Academic Press, New York, 1978, 27~63

6 赖炎连、吴方、桂湘云. 线性约束凸规划的既约变尺度法. 中国科学(A), 1982, **11**: 963~971

7 简金宝、吴任禄. 非线性规划的一个超线性收敛算法. 广西大学学报, 1990, **15**(2): 61~66

8 Pantoja F J A De O, Mayne D Q. *Exact penalty function algorithm with simple updating of the penalty parameters.* JOTA, 1991, **69**(1): 441~467


# A Class of Superlinearly Convergent Feasible Methods for Nonlinearly Constrained Optimizations


*Jian Jinbao*

(Xi'an Jiaotong Univ., 710049; Guangxi Univ., Nanning 530004)

*Xue Shengjia*

(Jinan University, Guangzhou 510632)



**Abstract**

This paper presents a class of feasible methods containing some of parameters for solving nonlinear inequality constrained optimization problem. At each iteration, the algorithm generates the search directions by solving only one quadratic programming with small scale. Under some assumptions, we prove that the algorithm possesses global and superlinear convergence.



**Keywords** nonlinear constrains, optimization, successive quadratic programming, feasible methods, global convergence, superlinear convergence.