第19卷第1期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 1
1999年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1999

双参数指数分布无失效数据的Bayes估计*

韩 明
(宁波大学，宁波 315211)

摘 要 本文对双参数指数分布的无失效数据(t_i, n_i)，在时刻t_i的失效概率$P_i = P\{T < t_i\}$的先验分布为截尾指数分布时，给出了P_i的Bayes估计，从而可以得到无失效数据可靠度的估计. 最后，结合实际问题进行了计算.

关键词 双参数指数分布，无失效数据，Bayes估计，失效概率.
分类号 AMS(1991) 62A15/CCL O212.1

1 引 言

自从文献[1]发表算起，对无失效数据的可靠性研究已有十几年的历史了，现在已引起各方面的重视，并且已取得了一些进展[2].

设某产品的寿命服从双参数指数分布，其分布函数为：

$$F(t) = 1 - \exp(-\frac{t-a}{b}), t \geqslant a, \tag{1}$$

其中$a>0, b>0$为未知参数.

现对寿命服从双参数指数分布的某产品进行定时截尾试验，截尾时间为$t_i(i = 1,2,\cdots,k)$，相应的试验样品数为$n_i(i = 1,2,\cdots,k)$，若共进行了n个样品的试验，$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$，结果所有样品无一失效，则称(t_i, n_i)为无失效数据. 记$S_i = n_i + \cdots + n_k$，它表示在定时截尾试验中，截尾时间达到或超过t_i的产品数，即在t_i时刻还未失效的产品数.

在文献〔3〕中提出了配分布曲线法，是很有意义的. 其基本做法是：首先估计失效概率$P_i = P\{T < t_i\}$，然而用最小二乘法给出分布参数的估计，其中关键是估计失效概率P_i. 在文献〔3〕中还给出了P_i的经典估计为：

$$\hat{P}_i = \frac{0.5}{S_i + 1}, (i = 1,2,\cdots,k). \tag{2}$$

文献〔4〕中给出了双参数指数分布无失效时可靠度的经典估计为：

$$\hat{R}(t) = \exp(-\frac{t-\hat{a}}{\hat{b}}), \tag{3}$$

* 1996年5月4日收到.
浙江省教委重点资助项目.

其中

$$\hat{a} = \frac{BC - AD}{AC - kD}, \quad \hat{b} = \frac{kB - A^2}{AC - kD}, \tag{4}$$

$A = \sum_{i=1}^{k} t_i, B = \sum_{i=1}^{k} t_i^2, C = \sum_{i=1}^{k} \ln(1 - \hat{P}_i), D = \sum_{i=1}^{k} t_i ln(1 - \hat{P}_i)$，$k$ 为无失效数据(t_i, n_i)的组数，$\hat{P}_i$ 为 P_i 的经典估计，由(2)式给出.

本文在 P_i 的先验分布为截尾指数分布时，给出双参数指数分布无失效数据(t_i, n_i)的失效概率 P_i 的 Bayes 估计，并结合文献[4]给出可靠度的估计. 最后，结合实例进行了计算.

2 P_i 的取值范围

对双参数指数分布(1)，由于 $F''(t) = -\frac{1}{b^2}\exp(-\frac{t-a}{b}) < 0$，所以 $F(t)$ 为 t 的凸函数，根据凸函数的性质知：

$$\frac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0} > \frac{P_2 - P_0}{t_2 - t_0} > \cdots > \frac{P_{i-1} - P_0}{t_{i-1} - t_0} > \frac{P_i - P_0}{t_i - t_0} > \cdots > \frac{P_k - P_0}{t_k - t_0} > 0.$$

当 $t_0 = 0$ 时，$P_0 = P\{T < t_0\} = F(0) = 0$，则上式变为：

$$\frac{P_1}{t_1} > \frac{P_2}{t_2} > \cdots > \frac{P_{i-1}}{t_{i-1}} > \frac{P_i}{t_i} > \frac{P_k}{t_k} > 0.$$

因此，$0 < P_i < \frac{P_{i-1} t_i}{t_{i-1}}, (i = 2,3,\cdots,k)$，记 $\lambda_i = \frac{\hat{P}_{i-1} t_i}{t_{i-1}}, (i = 2,3,\cdots,k)$，其中 $\hat{P}_{i-1}$ 是 P_{i-1} 的 Bayes 估计，根据文献〔5〕，则有：$0 < P_i < \lambda_i, (i = 2,3,\cdots,k)$. 根据文献[6]，有：$\hat{P}_{i-1} < P_i$，$(i = 2,3,\cdots,k)$，综合以上则有：

$$\hat{P}_{i-1} < P_i < \lambda_i, \ i = 2,3,\cdots,k. \tag{5}$$

所以 P_i 的取值范围由(5)式给出.

3 P_i 的先验分布

在文献[3]和[5]中，分别在 P_i 的先验分布为均匀分布时给出了 P_i 的 Bayes 估计. 但在无失效情况下，失效概率 P_i 大的可能性小，而小的可能性大，因此取均匀分布作为 P_i 的先验分布并不太恰当.

本文选取 P_i 的减函数 $\exp(-P_i)$ 作为 P_i 的先验密度的核，P_i 的取值范围由(5)式给出. 由此可得 P_i 的先验密度为：

$$\pi(P_i) = B\exp(-P_i), \ \hat{P}_{i-1} < P_i < \lambda_i, \tag{6}$$

其中 $B^{-1} = \exp(-\hat{P}_{i-1}) - \exp(-\lambda_i)$.

由(6)式给出的 P_i 的这个先验密度(即截尾指数分布的密度函数)是 P_i 的减函数，它符合在无失效情况下，P_i 大的可能性小，而小的可能性大的要求.

4　P_i 的Bayes 估计

定理　对 n 个寿命服从双参数指效分布(1)的产品进行定时截尾试验，结果所有样品无一失效，获得的无失效数据为 $(t_i, n_i), i = 1,2,\cdots,k, n = \sum_{i=1}^{k} n_i, S_i = n_i + \cdots + n_k$，若 P_i 的先验密度 $\pi(P_i)$ 由(6)式给出，则在平方损失下，P_i 的 Bayes 估计为 $(i = 2,3,\cdots,k)$：

$$\hat{P}_i = 1 - \frac{A_{S_i+1}(\hat{P}_{i-1}, \lambda_i)}{A_{S_i}(\hat{P}_{i-1}, \lambda_i)},$$

其中 $A_{S_i}(a,b) = \int_a^b (1-t)^{S_i} \exp(-t) \mathrm{d}t$.

当 $i = 1$ 时，$\hat{P}_1 = \frac{0.5}{S_1 + 1}$（这是借助文献〔3〕中 P_i 的经典估计 $\hat{P}_i = \frac{0.5}{S_i + 1}$ 中 $i = 1$ 的情况）.

证明　对 n 个寿命服从双参数指数分布(1)的产品进行定时截尾试验，结果所有样品无一失效，获得的无失效数据为

$$(t_i, n_i), i = 1,2,\cdots,k, n = \sum_{i=1}^{k} n_i, S_i = n_i +,\cdots, + n_k.$$

若 P_i 的先验密度 $\pi(P_i)$ 由(6)式给出，而在无失效情况下 P_i 的似然函数为[3]

$$L(0|P_i) = (1 - P_i)^{S_i}.$$

根据Bayes 定理，则 P_i 的后验密度为：

$$h(P_i|S_i) = \frac{\pi(P_i)L(0|P_i)}{\int_{P_{i-1}}^{\lambda_i} \pi(P_i)L(0|P_i)\mathrm{d}P_i} = \frac{(1-P_i)^{S_i}\exp(-P_i)}{\int_{\hat{P}_{i-1}}^{\lambda_i}(1-P_i)^{S_i}\exp(-P_i)\mathrm{d}P_i}$$

$$\triangleq \frac{(1-P_i)^{S_i}\exp(-P_i)}{A_{S_i}(\hat{P}_{i-1}, \lambda_i)}, (\hat{P}_{i-1} < P_i < \lambda_i).$$

其中 $A_{S_i}(a,b) = \int_a^b (1-t)^{S_i}\exp(-t)\mathrm{d}t$.

则在平方损失下，P_i 的 Bayes 估计为 $(i=2,3,\cdots,k)$

$$\begin{aligned}\hat{P}_i &= \int_{\hat{P}_{i-1}}^{\lambda_i} P_i h(P_i|S_i)\mathrm{d}p_i \\ &= \frac{1}{A_{S_i}(\hat{P}_{i-1}, \lambda_i)}\int_{\hat{P}_{i-1}}^{\lambda_i}[(1-P_i)^{S_i} - (1-P_i)^{S_i+1}]\exp(-P_i)\mathrm{d}P_i \\ &= 1 - \frac{A_{S_i+1}(\hat{P}_{i-1}, \lambda_i)}{A_{S_i}(\hat{P}_{i-1}, \lambda_i)}.\end{aligned}$$

□

5　实　例

对某型号发动机进行定时截尾试验，结果所有样品无一失效，获得的无失效数据（见文献[3]如表1，共有13组51个数据（单位时间：秒）.

设该型号发动机的寿命服从双参数指数分布，参数 a，b 及可靠度 $R(t)$ 的估计方法如下：

①经典方法——根据(2)、(3)、(4)式计算参数 a、b 和 $R(t)$的估计.

②Bayes 方法——根据本文的定理及(3)、(4)式计算参数 a、b 和 $R(t)$的估计.

按以上两种方法计算的 $\hat{a}$、$\hat{b}$、$\hat{R}(1000)$的结果列于表 2(限于篇幅只列出 $\hat{R}(1000)$).

表 1　某型发动机的无失效数据

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i	100.18	109.93	115.01	130.15	150.00	179.94	190.36
n_i	3	21	2	1	3	8	1
i	8	9	10	11	12	13	
t_i	250.15	783.00	849.94	870.03	909.77	1450.30	
n_i	1	4	3	1	1	2	

表 2　$\hat{a}$、$\hat{b}$、$\hat{R}(1000)$的计算结果

估计方法	$\hat{R}(1000)$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
经典方法	0.948144	257.2517	13948.5613
Bayes 方法	0.952400	269.3184	14982.9485

6　结束语

从实例的计算结果看(表 2),与文献[3]和[5]的计算结果的接近程度较好(无失效数据均取自文献[3]),符合文献[3]中专家的工程经验.

根据本文所给出的定理,结合(4)式可以得到双参数指数分布中分布参数的计估 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$,由此既可得到可靠度的估计 $\hat{R}(t) = \exp(-\frac{t-\hat{a}}{\hat{b}})$,也可得到平均寿命的估计 $\hat{\theta} = \hat{b} + \hat{a}$ 等.

需要说明的是,由于本文中 P_i 的取值范围由(5)式给出,即 $\hat{P}_{i-1} < P_i < \lambda_i$,因此由本文所给出的 P_i 的 Bayes 估计 $\hat{P}_i$ 不会出现“倒挂”现象,即 $\hat{P}_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 满足:

$$\hat{P}_1 < \hat{P}_2 < \cdots < \hat{P}_k, \tag{7}$$

从而避免了文献[3]和[5]等证明(7)式的麻烦.

致谢　感谢曹晋华研究员、王静龙教授、龚平教授对本课题的指导和帮助.

参 考 文 献

1　Martz H F, Waller R A. *A Bayes Zero-failure (BAZE) Reliability Demonstration Testing Procedure*. Journal of Quality Technology. 1979, 11(3): 128～137

2　韩明. 无失效数据可靠性研究进展. 宁波大学学报, 1993, 6(2): 1～7

3 茆诗松、罗朝斌. 无失效数据的可靠性分析. 数理统计与应用概率，1989，4(4)：489～506
4 韩明、赵仁杰. 指数型无失效数据的可靠性分析. 全国第四届可靠性学术会议论文集，北京：机械工业出版社. 1992，112～117
5 张志华. 无失效数据的统计分析. 数理统计与应用概率，1995，10(1)：94～101
6 张继昌. 无失效数据的 Bayes 分析. 高校应用数学学报，1995，10(1)：19～25

The Bayesian Estimation of Zero-Failure Data of Double-Parameter Exponential Distribution

Han Ming

(Ningbo University, Ningbo 315211)

Abstract

When the prior distribution of the failure probability $P_i=\{T<t_i\}$ is cut-complete exponential at time t_i, we give the Bayesian esimation of P_i and also the reliability estimation of zero-failure data (t_i, n_i).

Keywords double-parameter exponential distribution, Zero-failure data, Bayesian estimation, failure probability.