第19卷第1期
1999年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 19 No. 1
Feb. 1999

拟常曲率 Riemann 流形中的伪脐点子流形*

郑 永 爱
(扬州大学工学院，扬州 225006)

摘 要 研究了拟常曲率 Riemann 流形中具有平行平均曲率向量的伪脐点子流形，得到了一个 Simons 型公式.

关键词 平行平均曲率，伪脐点子流形，极小子流形.

分类号 AMS(1991) 53C42/CCL O186.16

1 引 言

拟常曲率黎曼流形 V^{n+p} 可由下面的黎曼曲率张量的形式来定义：

$K_{ABCD}=a(g_{AC}g_{BD}-g_{AD}g_{BC})+b(g_{AC}\lambda_B\lambda_D+g_{BD}\lambda_A\lambda_C-g_{AD}\lambda_B\lambda_C-g_{BC}\lambda_A\lambda_D)$，$\sum g^{AB}\lambda_A\lambda_B=1$.

在文[1]中，白正国教授把 Simons 型公式推广到拟常曲率黎曼流形中任何紧致无边极小子流形上，他证明了下面的结果：如果 M^n 是拟常曲率黎曼流形 V^{n+p} 中紧致无边极小子流形，那么

$$\int_{M^n}\{(2-\frac{1}{p})\sigma^2-[na+\frac{1}{2}(b-|b|)(n+1)]\sigma+n(n-1)b^2\}*1\geqslant 0, \qquad (1)$$

其中 σ 是 M^n 的第二基本形式长度的平方．本文把上述积分不等式推广到 M^n 是具有平行平均曲率向量的伪脐点子流形的情况，得到了下面的结果．

定理 设 M^n 是拟常曲率黎曼流形 V^{n+p} 中紧致无边的伪脐点子流形，且 M^n 的平均曲率在法丛中平行，则

$$\int_{M^n}\{\frac{3}{2}\sigma^2-[na+\frac{1}{2}(b-|b|)(n+1)]\sigma+n(n-1)b^2-nH^2\sigma+n^2H^2a+2nH^2b\}*1\geqslant 0, \qquad (2)$$

其中 σ 是 M^n 的第二基本形式长度的平方，H 是 M^n 的中曲率．

如果 M^n 为极小子流形，即 $H=0$，则(2)变为

$$\int_{M^n}\{\frac{3}{2}\sigma^2-[na+\frac{1}{2}(b-|b|)(n+1)]\sigma+n(n-1)b^2\}*1\geqslant 0,$$

当 $n>2$ 时，此式比(1)强，由此可知(2)为(1)的推广．

* 1995年11月17日收到. 1998年2月27日收到修改稿.

2 基本概念与公式

设 M^n 是 $n+p$ 维黎曼流形 V^{n+p} 中的 n 维子流形，选取 V^{n+p} 中局部规范正交标架场 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+p}$，使得限制在 M^n 上时，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 切于 M^n，$e_{n+1},e_{n+2},\cdots,e_{n+p}$ 法于 M^n. 约定指标变程为 $1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n$；$n+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n+p$；$1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant n+p$. 在上述正交标架场下，拟常曲率流形 V^{n+p} 的黎曼张量表示为

$$K_{ABCD}=a(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC})+b(\delta_{AC}\lambda_B\lambda_D+\delta_{BD}\lambda_A\lambda_C-\delta_{AD}\lambda_B\lambda_C-\delta_{BC}\lambda_A\lambda_D). \tag{3}$$

设 $\{e_A\}$ 的对偶标架场为 $\{\omega_A\}$，则 V^{n+p} 有结构方程

$$d\omega_A=-\sum_B\omega_{AB}\wedge\omega_B,\qquad \omega_{AB}+\omega_{BA}=0, \tag{4}$$

$$d\omega_{AB}=-\sum_C\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{C,E}K_{ABCE}\omega_C\wedge\omega_E, \tag{5}$$

限制在 M^n 上有

$$\omega_\alpha=0,$$

$$\omega_{i\alpha}=\sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j,\qquad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}, \tag{6}$$

$$d\omega_i=-\sum_j\omega_{ij}\wedge\omega_j,\qquad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,$$

$$d\omega_{ij}=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij},\qquad \Omega_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{7}$$

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{8}$$

$$d\omega_{\alpha\beta}=-\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\Omega_{\alpha\beta},\quad \Omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum_{i,l}R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{9}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=K_{\alpha\beta kl}+\sum_i(h^\alpha_{ik}h^\beta_{il}-h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}). \tag{10}$$

$B=\sum_{\alpha,i,j}h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_je_\alpha$ 称为子流形 M^n 的第二基本形式，其长度平方

$$\sigma=|B|^2=\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2,\qquad \eta=\frac{1}{n}\sum_{\alpha,i}h^\alpha_{ii}e_\alpha$$

称为平均曲率向量场. 记 $\eta^\alpha=\frac{1}{n}\sum_i h^\alpha_{ii}$，于是 $\eta=\eta^\alpha e_\alpha$，平均曲率长度记为 $H=\left(\sum_\alpha(\eta^\alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，如果 $H=0$，则称 M^n 为极小子流形.

定义 h^α_{ij} 的共变微分为

$$\nabla h^\alpha_{ij}=dh^\alpha_{ij}-\sum_l h^\alpha_{lj}\omega_{li}-\sum_l h^\alpha_{il}\omega_{lj}+\sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\alpha\beta}\overset{def}{=}\sum_k h^\alpha_{ijk}\omega_k;$$

η^α 的共变微分为

$$\nabla\eta^\alpha=d\eta^\alpha+\sum_\beta\eta^\beta\omega_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}\sum_k\eta^\alpha_k\omega_k;$$

如果对于任意 α,k 有 $\eta^\alpha_k=0$，则称平均曲率向量场是平行的. 如果 $X,Y\in C^\infty(TM^n)$ 有

$$\langle B(X,Y),\eta\rangle=H^2\langle X,Y\rangle \text{ 或 } \langle B(X,Y),\bar\eta\rangle=H\langle X,Y\rangle, \tag{11}$$

其中 $\bar\eta=\frac{\eta}{H}$ 是 η 方向上的单位向量，则称 M^n 是伪脐的. 显然极小子流形是伪脐的.

现在假设 $e_{n+1}=\bar{\eta}$,于是有

$$\eta^{n+1}=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{n+1}=H, \tag{12}$$

$$\eta^{\beta}=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{\beta}=0, \quad \beta>n+1, \tag{13}$$

从(12)和(13)可知,M^n 是伪脐的当且仅当 $h_{ij}^{n+1}=H\delta_{ij}$.

3 定理的证明

若 $H=0$,把文[1]中(27)用文[4]中的不等式

$$\sum_{\alpha,\beta}N(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)+\sum_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^2\leqslant\frac{3}{2}\sigma^2$$

替代,仿文[1]中定理的证明即得.以下设 $H\neq 0$,由文[2]中(2.12)和(2.21)有

$$h_{ijk}^{\alpha}-h_{ikj}^{\alpha}=K_{i\alpha jk}, \tag{14}$$

$$\triangle h_{ij}^{\alpha}=\sum_k(h_{kkij}^{\alpha}-K_{\alpha ikj}-K_{\alpha ijkk})+\sum_k(\sum_m h_{km}^{\alpha}R_{mijk}+\sum_m h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}-\sum_\beta h_{ki}^{\beta}R_{\alpha\beta jk}), \tag{15}$$

另一方面,我们能很容易证明下列方程

$$d(\sum h_{ij}^{\alpha}K_{i\alpha jk}*\omega_k)=\sum(h_{ij}^{\alpha}K_{i\alpha jkk}+h_{ijk}^{\alpha}K_{i\alpha jk})\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n,$$

$$d(\sum h_{ij}^{\alpha}h_{kki}^{\alpha}*\omega_j)=\sum(h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha}+h_{kki}^{\alpha}h_{ijj}^{\alpha})\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n,$$

$$d(\sum h_{ij}^{\alpha}K_{k\alpha ik}*\omega_j)=\sum(h_{ij}^{\alpha}K_{k\alpha ikj}+h_{ijj}^{\alpha}K_{k\alpha ik})\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n.$$

根据 Stokes 定理,对于任何紧致无边子流形 M^n,有

$$\int_{M^n}\sum h_{ij}^{\alpha}(h_{kkij}^{\alpha}+K_{k\alpha ikj}+K_{i\alpha jkk})*1=-\int_{M^n}\sum(h_{ijk}^{\alpha}K_{i\alpha jk}+h_{kki}^{\alpha}h_{ijj}^{\alpha}+h_{ijj}^{\alpha}K_{k\alpha ik})*1.$$

由(14)式,有

$$\sum h_{ijk}^{\alpha}K_{i\alpha jk}=\frac{1}{2}\sum h_{ijk}^{\alpha}K_{i\alpha jk}-\frac{1}{2}\sum h_{ikj}^{\alpha}K_{i\alpha jk}=\frac{1}{2}\sum K_{i\alpha jk}^2, \tag{17}$$

$$\sum(h_{kkj}^{\alpha}h_{ijj}^{\alpha}+h_{ijj}^{\alpha}K_{k\alpha ik})=\sum(\sum_j h_{jij}^{\alpha})^2. \tag{18}$$

由文[3]可知,如果 M^n 是$(n+p)$维黎曼流形 V^{n+p} 中的一个 n 维紧致无边子流形,那么

$$\int_{M^n}(\sum h_{ij}^{\alpha}\triangle h_{ij}^{\alpha})*1=-\int_{M^n}\sum(h_{ijk}^{\alpha})^2*1\leqslant 0. \tag{19}$$

从(15)～(19)可知

$$\int_{M^n}\{P-\frac{1}{2}\sum K_{i\alpha jk}^2+\sum(h_{ijk}^{\alpha})^2-\sum(\sum_l h_{ijl}^{\alpha})^2\}*1=0,$$

其中

$$P=\sum(h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}R_{lijk}+h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}R_{lkjk}+h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}). \tag{20}$$

由(8)可知

$$\sum h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}R_{lijk}=-\frac{1}{2}\sum(h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}-h_{ik}^{\alpha}h_{lj}^{\alpha})^2-\frac{1}{2}\sum(h_{lj}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}-h_{lk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha})K_{lijk}. \tag{21}$$

由(13)和(18)得

$$\sum h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}R_{lkjk}=\sum h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}K_{lkjk}+\sum h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}h_{ij}^{n+1}h_{kk}^{n+1}-\sum_{j,l}(\sum_{i,\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha})^{2}, \tag{22}$$

因为 V^{n+p} 是一个拟常曲率流形,我们从(3)得 $K_{\alpha\beta jk}=0$,再从(10)推出

$$\sum h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}=-\frac{1}{2}\sum(h_{ij}^{\alpha}h_{jk}^{\beta}-h_{ik}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})^{2}, \tag{23}$$

而且有

$$\sum\{\sum_{\alpha}(h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}-h_{lk}^{\alpha}h_{lj}^{\alpha})\}^{2}=2\sum_{\alpha,\beta}(\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})^{2}-2\sum h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}h_{lj}^{\beta}$$

和

$$\sum\{\sum_{l}(h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-h_{ik}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})\}^{2}=2\sum_{i,l}(\sum_{\alpha,j}h_{ij}^{\alpha}h_{lj}^{\alpha})^{2}-2\sum h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}h_{lj}^{\beta}.$$

由上两式,得

$$\begin{aligned}&\sum\{\sum_{\alpha}(h_{ij}^{\alpha}h_{lk}^{\alpha}-h_{ik}^{\alpha}h_{lj}^{\alpha})\}^{2}\\&=\sum\{\sum_{l}(h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-h_{ik}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})\}^{2}+2\sum_{\alpha,\beta}(\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})^{2}-2\sum_{i,l}(\sum_{\alpha,j}h_{ij}^{\alpha}h_{lj}^{\alpha})^{2}.\end{aligned} \tag{24}$$

把(21)~(24)代入(20),得

$$\begin{aligned}-P=&\sum\{\sum_{l}(h_{ij}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-h_{ik}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})\}^{2}+\sum_{\alpha,\beta}(\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})^{2}-\\&\sum h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}K_{lkjk}+\frac{1}{2}\sum(h_{lj}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}-h_{lk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha})K_{lijk}-\sum h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}h_{ij}^{n+1}h_{kk}^{n+1}.\end{aligned} \tag{25}$$

由文[4]知

$$\sum_{\alpha,\beta}N(H_{\alpha}H_{\beta}-H_{\beta}H_{\alpha})+\sum_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{2}\leqslant\frac{3}{2}\sigma^{2}, \tag{26}$$

其中

$$N(H_{\alpha})=\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^{2},\quad \sigma_{\alpha\beta}=\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta},\quad H_{\alpha}=(h_{ij}^{\alpha}),$$

$$-P\leqslant\frac{3}{2}\sigma^{2}+\frac{1}{2}\sum(h_{lj}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}-h_{lk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha})K_{lijk}-\sum h_{ij}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}K_{lkjk}-\sum h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{lj}^{n+1}h_{kk}^{n+1}. \tag{27}$$

由(3)得

$$K_{lijk}=a(\delta_{lj}\delta_{ik}-\delta_{lk}\delta_{ij})+b(\delta_{lj}\lambda_{i}\lambda_{k}+\delta_{ik}\lambda_{l}\lambda_{j}-\delta_{lk}\lambda_{i}\lambda_{j}-\delta_{ij}\lambda_{l}\lambda_{k}) \tag{28}$$

和

$$\sum_{k}K_{ikjk}=[(n-1)a+b\sum_{k}\lambda_{k}^{2}]\delta_{lj}+b(n-2)\lambda_{l}\lambda_{j}. \tag{29}$$

把(28)和(29)代入(27),得

$$\begin{aligned}-P\leqslant&\frac{3}{2}\sigma^{2}-[na+b\sum\lambda_{k}^{2}]\sigma-bn\sum(\sum_{l}\lambda_{l}h_{il}^{\alpha})^{2}-\sum h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{kk}^{n+1}+\\&2nH^{2}b\sum\lambda_{i}^{2}+n^{2}H^{2}a.\end{aligned} \tag{30}$$

由(3)有 $K_{l\alpha jk}=b\lambda_{\alpha}(\delta_{lj}\lambda_{k}-\delta_{lk}\lambda_{j})$,因而得

$$\sum K_{l\alpha jk}^{2}=2(n-1)b^{2}\sum\lambda_{\alpha}^{2}\sum\lambda_{j}^{2}. \tag{31}$$

从(14)有 $h_{lij}^{\alpha}-h_{ilj}^{\alpha}=K_{l\alpha jl}$,于是对任何平行平均曲率向量的伪脐子流形,有

$$\sum(\sum_l h^a_{ijl})^2 = \sum(\sum_l K_{laj l})^2 = (n-1)^2 b^2 \sum\lambda_a^2 \sum\lambda_j^2, \tag{32}$$

$$\sum h^a_{ij} h^a_{ll} h^{n+1}_{ij} h^{n+1}_{kk} = nH^2\sigma. \tag{33}$$

把(30)～(33)代入(20)且$\sum\lambda_j^2 \leqslant 1$,得

$$\int_{M^n}\{\frac{3}{2}\sigma^2 - [na + b\sum\lambda_k^2]\sigma - nb\sum_{i,a}(\sum_l \lambda_l h^a_{il})^2 + n(n-1)b^2\sum\lambda_a^2 - nH^2\sigma + 2nH^2b + n^2H^2a\} * 1 \geqslant 0. \tag{34}$$

因为$\sum\lambda_a^2 \leqslant 1, \sigma \geqslant 0$,所以当$b \geqslant 0$时,有

$$\int_{M^n}\{\frac{3}{2}\sigma^2 - na\sigma + n(n-1)b^2 - nH^2\sigma + n^2H^2a + 2nH^2b\} * 1 \geqslant 0. \tag{35}$$

当$b < 0$时,因为

$$\sum_{i,a}(\sum_l \lambda_l h^a_{il})^2 \leqslant \sum_{i,a}(\sum_l \lambda_l^2 \sum_k (h^a_{ik})^2) \leqslant \sigma^2,$$

所以

$$\int_{M^n}\{\frac{3}{2}\sigma^2 - na\sigma - (n+1)b\sigma + n(n-1)b^2 - nH^2\sigma + n^2H^2a + 2nH^2b\} * 1 \geqslant 0. \tag{36}$$

由(35)和(36)可得(2)式.

参 考 文 献

1 Bai Zhenguo. Chin. Ana. of Math., 1988, **9B**(1): 32～37

2 Yan S T. Amer. Jour. of Math., 1974, **96**: 346～366

3 Chern S S. do Carmo M, Kobayashi S. Funcational Analysis and Related Fields. 1970, 59～75

4 Li Anmin, Li Jimin. Arch. Math., 1992, **58**: 582～594

Pseudo-Umbilical Submanifolds in a Riemannian Manifold of Quasi Constant Curvature

Zheng Yongai

(Industrial College, Yangzhou University, 225006)

Abstract

The pseudo-umbilical n-submanifolds with parallel mean curvature in an $(n+p)$-Riemannian manifold of quasi constant curvature are discussed. A formula of simons'type is obtained.

Keywords parallel mean curvature, pseudo-umbilical submanifold, minimal submanifold.