

图论中独立支配集的求解问题并未解决*

莫 忠 息

(武汉大学数学科学学院, 武汉 430072)

摘 要 用反例证明了文[1]中的最大独立集算法和最小支配集算法的结论都是错误的, 因而图论中独立支配集的求解问题并没有解决.

关键词 图论, 独立集, 支配集, 算法.

分类号 AMS(1991) 05C30/CCL O157.5

最近, 文[1]提出了一系列求图(包括无向图和有向图)的独立集和支配集的多项式型算法, 并声称已经圆满地解决了图论中独立集与支配集的求解问题. 由于图的最大独立集问题和图的最小支配集问题都已被证明是 NP 完全问题. 因此, 如果求解图的最大独立集(或最小支配集)问题有了多项式型的算法, 那么“NP=P?”这一重大难题也就得到了圆满的解决. 在本文里, 要构造一些反例来证明[1]中相关算法的结论是错误的.

以下只讨论无向图 $G=(V, E)$, 所使用的记号与[1]完全相同. 为了叙述方便, 把[1]中求图的最大独立集算法改记为算法 1, 并将其复述如下:

- (1) INPUT A ;
- (2) $A' \leftarrow A$; $V' \leftarrow V$; $S \leftarrow \emptyset$;
- (3) While $V' \neq \emptyset$ do [- (4) 将 V' 中各结点依结点度数递增的顺序排列, 且对于其中同度数结点, 再依它们各自所邻接的结点的外围辐射边总数递减的顺序排列;
- (5) $v \leftarrow V'. \text{head}$; $S \leftarrow S \cup \{v\}$; $V' \leftarrow V' - \{v\} \cup A'(v)$;
- (6) for all $u \in A'(v)$
- (7) for all $w \in A'(u)$
- (8) if $w \notin \{v\} \cup A'(v)$
- (9) then $[A'(w) \leftarrow A'(w) - \{u\}$;
- (10) $\text{DEG}(w) \leftarrow \text{DEG}(w) - 1$;]
- (11) OUTPUT S ;
- (12) STOP.

把[1]中求最小支配集的算法改记为算法 2. 与上面的算法 1 相比, 算法 2 只是将算法 1 中的(4)改为如下的(4'), 其余部分与算法 1 相同.

* 1996 年 4 月 27 日收到. 1998 年 4 月 21 日收到修改稿.

(4') 将 V' 中各结点依结点度数递减的顺序排列;且对于其中同度数结点,再依它们各自所邻接的结点的外围辐射边数递增的顺序排列;

需要指出的是,对于那些不仅其度数相同,而且其外围辐射边总数也相同的结点,上述两个算法还应当为它们指定某种排列顺序,否则算法的步骤将是不确定的.不过,这个问题对本文以下的讨论并没有实质性的影响.

首先证明算法 1. 不能保证所求得的点集 S 一定就是图的最大独立集. 考虑由图 1 所示的无向图 G_1 . 不难看出, G_1 的独立数是 5, 而且点集 $\{v_1, v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$ 是 G_1 的一个最大独立集. 将算法 1 应用于 G_1 . 由于 v_1 的度数 $\text{DEG}(v_1)=1$ 为最小, 因此, 第一次循环被选入 S 的结点必定是 v_1 . 从 V' 中删除 v_1 和 v_2 , 此时 V' 中还剩 8 个结点 v_3-v_{10} . 执行步骤(6)–(10), 结点 v_5 和 v_7 的度数各自减 1, 其余结点的度数不变. 这样, 在做第二次循环时, 被选入 S 的结点只能是 v_3 (因为此时 v_3 的度数 $\text{DEG}(v_3)=2$ 为最小), 至此就有 $S=\{v_1, v_3\}$. 但是, 直接观察图 G_1 可知, 对于 G_1 的任一个独立集 S , 如果 S 包含结点 v_1 和 v_3 , 那么 S 所能包含的结点总数不可能多于 4 个. 这表明, 对于图 G_1 , 用算法 1 不可能求得它的最大独立集.

下面证明算法 2 不能确保所求得的点集 S 一定就是图的最小支配集. 考虑由图 1 所示的无向图 G_2 . 不难看出, G_2 的最小支配集是 $\{v_2, v_3, v_4\}$. 将算法 2 应用于 G_2 . 由于 v_1 是 G_2 中度数最大的结点, 因此, 第一次循环被选入 S 的结点必定是 v_1 . 由此就可以断定, 对于 G_2 , 算法 2 不可能求得它的最小支配集.

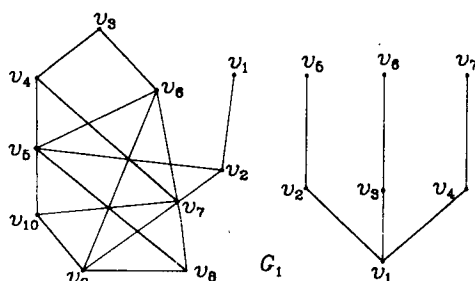


图1 两个无向图

参 考 文 献

- 1 张光铎、王正志. 图论中独立支配集的最佳求解算法研究. 国防科技大学学报, 1995, 2: 78~85

The Problem of Solving the Independent-Dominating Set of a Graph is Open

Mo Zhongxi

(Mathematical College of Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract

This paper shows by counterexamples that the algorithms of finding maximum independent set and minimum dominating set of a graph in [1] are wrong.

Keywords graph theory, independent set, dominating set, algorithm.