第19卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 19 No. 1
1999年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1999

《FRAME 与连续格》评注*

王国俊　　赵东升
(陕西师范大学数学系，西安 710062)

关键词　Frame，连续格，拓扑.
分类号　AMS(1991) 54A12，06B35/CCL O153.1，O189.11

郑崇友、樊磊、崔宏斌著的《Frame 与连续格》一书(以下简称《格》)已由首都师范大学出版社出版.《格》是我国第一部系统论述 Frame 理论和连续格理论的学术专著，是适合于格与拓扑方向研究生和高年级本科生使用的好教材.

1　《格》提供了广义空间理论的一个要览

按 Bourbaki 学派的观点，数学中有三大母结构，即代数结构、拓扑结构和序结构.《格》正是将这三种结构融合在一起而展开的理论.

集合间的包含序是最自然的序了，因此早在拓扑空间基于开集公理化而定义的初期，人们就知道拓扑空间$(X, \Omega(X))$的拓扑(即其全体开集集族$\Omega(X)$)按集合的包含序构成一个格，只是并未引起大家的关注. 30 年代末期这一情况由于 Stone 表示定理的出现[2]，而有了根本的变化. 正如《格》的前言所说"Stone 表示定理表明可以从纯代数的结构出发得到拓扑学中若干有趣的空间，并且运用格伦的方法与技巧对这些空间的特性进行研究，从而得出关于拓扑学中带有普遍意义的结论."其实，在与 M. H. Stone 研究的同时，由于拓扑空间也可用带有闭包算子的集合来描述，而在这种描述中点的概念并不出现，所以寺板英孝于 1937 年把 Kuratowski 公理与格论结合起来进行研究，提出了无须点的概念的拓扑格理论. 这一点在关肇直先生的著作[3]中有专门的论述，这些都是格与拓扑相结合的研究. 50 年代初 G. Nöbeling 专著[4]的出版表明把格论与拓扑空间理论融合起来进行研究已取得了相当丰富的成果. 值得注意的是多种序与拓扑相结合的研究各有其不同的侧重与模式，其中把开集格$\Omega(X)$作为主要研究对象的工作由于 C. Ehresmann 1957 年著名论文[5]的发表一跃而成为这方面研究的主导. 按 Ehresmann 的观点，象$\Omega(X)$这种具有某种分配性的格自身就可当成是一种广义的空间来进行研究. 他的这种观点产生了深远的影响，今天广义空间理论已发展成为一门充满生机的新学科——Frame 理论，其基本对象的完备 Heyting 代数，也叫 frame 或 locale，其态射为保任意并和有限交的映射.《格》的第三章给出了这一理论的要览.

* 1996年4月1日收到.
国家自然科学基金与回国人员基金的资助.

广义空间理论的特点之一是注重开集格的整体性质，一般不考虑点的存在，因而也有无点化拓扑之称. 就中建立的概念与命题都是拓扑空间中相应概念与命题的推广. 由于在这种一般框架中缺少点的概念，自然会使无点化拓扑与点集拓扑有很多不同. 然而这并不是说在点集拓扑学中与点有关的概念都不能在无点化拓扑中讨论. 事实上，有相当多表面上涉及点的概念往往都可通过巧妙的方法而将点回避开去. 比如，拓扑空间叫正则空间，如果每个点的开邻域中都包含有这个点的闭邻域. 这一条件就可用不涉及点的形式表述为：每个开集 G 都是一些开集的并，同时 G 也是这些开集的闭包之并. 基于这种想法在 Frame 理论中就引入了正则 locale 的概念，而且当一个 locale L 是某拓扑空间的开集格 $\Omega(X)$ 时，L 的正则性与 $(X,\Omega(X))$ 的正则性相一致(见[1],p111). 这个例子也表明了 Frame 理论中的概念与命题的确是拓扑空间中相应事物的推广和一般化形式.《格》中关于有限元、紧 locale 以及零维 locale 等的论述也都表明了这一点.

广义空间理论的又一特点是它经常还从另一意义上的整体观点来展开研究，即从范畴论的观点来研究 Frame 理论，它不仅把单个的 locale 作为研究对象，也把全体对象以及对象之间的态射合成为整个范畴来进行研究.《格》就充分体现了这一特点，如《格》中关于 Boole 代数的 Stone 表示定理的范畴论描述，关于 Sober 空间范畴与空间式 locale 范畴等价的论断以及关于分配格范畴和凝聚 locale 范畴对偶等价的定理等都是这种更大的整体性研究的成果范例.

2 《格》给出了连续格理论的一个新版本

连续格理论不属于广义空间理论，人们并非以拓扑空间为背景或蓝本来展开连续格理论的. 然而格论方法与拓扑方法在连续格理论中的水乳交融一点也不比在广义空间理论中逊色，同时连续格理论更与 Frame 理论有诸多直接的联系，正因如此《格》的作者们把 Frame 与连续格合起来展开论述，这样不但可以共用范畴论与格论的预备知识(《格》的前两章)，而且两种理论间可以方便地相互借鉴和参照，真不失为一种高明的决策.

关于连续格理论，除《格》而外还见到 G. Gierz 等人的专著《A Compendium of Continuous Lattices》[6]和 B. Banaschewski 等全编的论文集《Continuous Lattices》[7]. 正如 Banaschewski 等在介绍[6]时所说的，[6]只是一个准备，象有重要应用的连续偏序集理论[6]中就未及仔细讨论[7]. 而《格》恰恰弥补了这一缺陷，从论述连续偏序集入手并将连续格作为特殊的连续偏序集来安排，可以说把握住了轻重与全从. 正是在这一意义上，可以说《格》提供了连续格理论的一个新版本.

《格》将连续格理论也包括在书中与广义空间理论一起论述不仅仅是由于二者有密切的联系，更重要的原因在于连续格与连续偏序集理论有着广泛的应用，因而值得作专门的论述. 比如，《格》的第 4 章中就包含了连续偏序集理论在拓扑代数中的重要应用. 这里对连续格理论的发端及其应用再作一补充介绍.

连续格概念是 D. S. Scott 由于研究函数空间的计算问题而于 1972 年首次提出的[8]. 简单地说，连续格是一种具有理想的逼近系统的格. 由于在一般情况下并没有一种度量可用来衡量一个逼近的好坏，那么取而代之，用一种虽然略微抽象但却合理的系统去描述一个逼近的程度

自然就是十分必要的了.这就是下面要讲的理想逼近系统.

设 P 是完备格,$a\in P$.所谓 a 的一个理想逼近是 P 的一个子集 $\beta=\{b_i:i\in I\}$,它具有以下三条性质:

(i) $\mathrm{Sup}\beta=a$ 且 β 中的元都是"简单的".

(ii) β 是定向的,即 β 自身组织得比较好,对 β 中任二元 a_i 与 a_j,β 中有更好的逼近 b_k,使 $b_i\leqslant b_k$,$b_j\leqslant b_k$.

(iii) β 加细 a 的任何别的定向逼近 $\gamma=\{c_t:t\in T\}$,即$\forall\ b_i\in\beta$,有 $c_t\in\gamma$ 使 $b_i\leqslant c_t$.

如果 P 是 Heyting 代数,则(iii)还可改为

(iii)′ 设定向集 γ 满足 $\sup\gamma\geqslant a$,则$\forall\ b_i\in\beta$,有 $c_t\in\gamma$ 使 $b_i\leqslant c_t$.

当$\forall\ a\in P$,a 都有上述理想的逼近系统时,称 P 为连续格.注意,这并不是连续格的正式定义,同时在上面(i)中什么是"简单"也没有解释,那是因具体问题的不同而不同的.连续格的正式定义请参看《格》.这里我们来看一些例子:以 P 记$[0,1]$上全体取值于$[0,1]$的下半连续函数按点式序所成的偏序集,则 P 就是连续格.这里$\forall\ A\in P$,A 的理想逼近是其图象在 A 的图象下方的阶梯形函数之族$\{r_1\chi_{U_1}\vee\cdots\vee r_n\chi_{U_n}\}$,这里$\forall\ i(i=1,\cdots,n)$,$U_i^-\subset\{x:A(x)>r_i\}$.在本例中阶梯函数与一般下半连续函数相比自然是简单的,其整体也构成定向集,同时不难证明(iii)′成立,从而 P 确实构成连续格.另一个例子则表明连续偏序集在应用上远较连续格重要.以 $\mathscr{F}$ 表示定义在自然数集 N 的某子集上且取值于 N 的部分函数之集,在 $\mathscr{F}$ 上规定 $f\leqslant g$ 当且仅当 f 的图象是 g 的图象的子集,则 $\mathscr{F}$ 是偏序集.由于两个函数图象的并集一般不再是任何函数的图象,所以 $\mathscr{F}$ 不是格,当然也就不是连续格.但 $\mathscr{F}$ 对定向并运算和任意交运算是封闭的,而且构成连续偏序集.设 $f\in\mathscr{F}$,则 f 的理想逼近还由小于或等于 f 且定义域为 N 的有限子集的那种部分函数组成.这里定义域为有限集的函数当然是简单的,且小于或等于 f 的这种简单函数构成定向集以及条件(iii)′成立都不难直接验证,故 $\mathscr{F}$ 的确为连续偏序集.以上例子一个方面对连续格以及连续偏序集与逼近算法的关系是一个说明,另一方面也清楚地表明了《格》中着重讨论连续偏序集而把连续格作为特款来处理是完全正确的.

连续格理论固然是发源于计算问题的,但它一经形成,人们很快就发现了它与其它数学领域的广泛联系,其中尤其以与拓扑空间理论和广义空间理论的关系最为密切.《格》上随处可见这方面的例子,如对于 Sober 空间 X 而言,X 是局部紧空间当且仅当 $\Omega(X)$是连续格,连续格范畴与内射 T_0 空间范畴等价以及可以通过连续格概念来定义局部紧 locale 等等.此外,在连续格上还自然存在着两种内蕴拓扑,即 Scott 拓扑与 Lawson 拓扑,这就更使连续格理论、拓扑空间理论和广义空间理论结上了不解之缘.这些都在《格》中有精当的论述.

连续偏序集理论对拓扑代数的研究产生了直接的影响,尤其关于拓扑半格理论更是如此.由于连续格概念的出现而有了漂亮的紧交半格基本定理(见[1],定理 4.9.4).连续格理论的出现还丰富了范畴理论,因为作为一个重要方面,它提供了新的笛卡儿闭的范畴的模型.

总之,读者在《格》中不但可以看到格与拓扑相结合的研究范例,而且可以看到它们在数学各相关领域研究中广阔的应用前景,这自然应归功于《格》的作者们把 Frame 理论与连续格理论同台展开的恰当安排.

3 结 语

除了上面提到的《格》的各种特色而外，它还具有许多别的优点. 首先，《格》在内容安排上是自封的，它不要求读者具有专门的准备知识，甚至对格论不很熟悉的读者也可读懂本书. 当然，对拓扑空间有一定程度的了解以及有较好的数学修养对学习本书是必要的. 其次，《格》注意了用相对来说是直观或具体的例子去说明较为抽象的概念与命题，并且在容易产生混淆之处适时地用“注意”或“注”来提醒读者或作进一步的说明. 再次，《格》中注重了使用我国学者的研究成果，如极小集理论、拟极小集理论等[9-12]，使若干定理的证明得到了简化. 这也是《格》不同于国外同类著作的特点之一. 最后，《格》中提供了格与拓扑研究方面相当完备的参考文献目录，对有志于格与拓扑研究的读者来说是作进一步研究的一个导引. 总之.《格》既是一本好教材，也是一部好的学术专著，相信《格》的出版一定会对我国格与拓扑的研究起到推动作用.

参 考 文 献

1 郑崇友、樊磊、崔宏斌. Frame 与连续格. 首都师范大学出版社，1994.

2 Stone M H. *The theory of representation for Boolean algebras*. Trans. AMS, 1936, **40**:37～111

3 关肇直. 拓扑空间概论. 科学出版社，1958.

4 Nõbeling G. *Grundlagen der Analytischen Topologic*. Springer-Verlag, 1954.

5 Ehresmann C. *Gattungen vol localen structuren*. Jber. Deusch. Math. Verein, 1957, **60**:59～77

6 Gierz G. et al. *A compendium of continuous lattices*. Springer-Verlag, 1980.

7 Banaschewski B and Hoffmann R. *Continuous lattices*. Lecture Notes in Math. 871, Springer-Verlag, 1981.

8 Scott D S. *Continuous lattices*. Lecture Notes in Math. 274, Springer-Verlag, 1972, 97～136

9 王国俊. φ-极小集理论及其应用. 科学通报，1986，**31**:1049～1053

10 樊 磊. 拟极小集理论及其对连续偏序集的应用. 北京师范学院学报(自然科学版)，1992，**2**:12～17

11 王戈平、胡兰芽. φ-序同态及其在φ-连续格理论中的应用. 数学研究与评论，1992，**12**:361～365

12 刘应明、蒋继光. 点集拓扑学进展. 自然科学年鉴，上海科学技术出版社，1989.