非正规情形下代数 Hermite-Padé 逼近的存在性与唯一性*

钱泽平 朱功勤
(合肥工业大学数力系, 230009)

摘 要: 本文研究了非正规情形下一局部解析函数 $f(z)$ 的代数 Hermite-Padé 逼近, 并在一般条件下证明了它的存在性与唯一性

关键词: 代数形式, 非正规, 代数 Hermite-Padé 逼近
分类号: AMS(1991) 41A21/CLC O174.41
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)02-0467-04

1 引 言

近年来研究代数 Hermite-Padé 逼近(简记为 HPA)已广泛为人们所关注[1],[2], 而其存在与唯一性是首先应当解决的问题, 文[2]研究了实值解析函数的 HPA, 证明了正规情形下的存在与唯一性. 本文在非正规情形下, 研究了一局部解析函数 $f(z)$ 的 p $(p\geq 2)$ 次 HPA 的逼近阶, 着重讨论了选择最佳逼近唯一性的条件, 并由此系统地证明了 HPA 的存在性与唯一性.

定义1[2] 设 $f(z)$ 为一形式幂级数, 并在原点的邻域内解析; $p\geq 1$ 为自然数, $n_i\geq -1$ $(i=0,1,\cdots\cdots,p)$ 为整数, 记 $\mathrm{n}=(n_0,n_1,\cdots,n_p)$, 则称函数

$$P_{\mathrm{n}}(f,z)=\sum_{i=0}^{p}a_i(z)f(z)^i=O(z^N)$$

为 $f(z)$ 的 p 次 Hermite-Padé 代数形式, 简称代数形式; 其中

(Ⅰ) $a_i(z)$ 是多项式, 且 $\deg(a_i(z))\leq n_i$ (若 $n_i=-1$, 则 $a_i(z)\equiv 0$, $i=0,1,\cdots\cdots,p$);

(Ⅱ) 至少有一个 i 使得 $a_i(z)\not\equiv 0$ $(i=1,\cdots\cdots,p)$;

(Ⅲ) $N=\sum_{i=0}^{p}(n_i+1)-1$.

在不易混淆的情形下, 以下 $P_{\mathrm{n}}(f,z)$ 常简记为 $P(f,z)$.

定义2 若当 $z\to 0$ 时, $P(f,z)=O(z^R)$ 且 $P(f,z)\neq O(z^{R+1})$, 则称 $P(f,z)$ 的阶为 R, 记作 $\mathrm{Ord}(P(f,z))=R$.

[2]中已证具有最高阶 R $(\geq N)$ 的 $P(f,z)$ 总是本性唯一存在的, 即系数多项式 $a_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,p)$ 的所有组解只相差一非零常数倍, 我们把此本性唯一的代数形式记作 $P^*(f,z)$ (或 $P_{\mathrm{n}}^*(f,z)$), 即

* 收稿日期: 1996-06-03
作者简介: 钱泽平(1963-), 女, 安徽巢县人, 硕士, 现为合肥工业大学讲师

$$P^*(f,z)=\sum_{i=0}^{p}a_i^*(z)f(z)^i=O(z^R).\tag{1}$$

定义3 设$P^*(f,z)$如(1)所定义，将满足方程

$$P^*(Q,z)=\sum_{i=0}^{p}a_i^*(z)Q(z)^i=0\tag{2}$$

及初始条件

$$Q(0)=f(0)\tag{3}$$

的解$Q(z)$称为$f(z)$的代数Hermite-Padé逼近.

定义4 若$\frac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\Big|_{z=0}=0$，则称$P^*(f,z)$为非正规的，否则为正规的.

2 主要结果

若$P_n^*(f,z)=z^rP_m^*(f,z)=O(z^R)$，其中$r>0$，$P_m^*(f,z)$的系数多项式无$z^r$的公因子. 当$P_m^*(f,z)$为正规时，其存在唯一性文[2]已证；而当$P_m^*(f,z)$为非正规时，可讨论与之等价的$P_m^*(f,z)=O(z^{R-r})$.

故本文在以下的讨论中，均不妨假设$P^*(f,z)$为系数多项式无$z^r(r>0)$公因子的非正规的代数形式.

引理1[3] 考虑方程$F(z,w)=0$，其中$F(z,w)$是解析于域$|z-z_0|<\gamma$，$|w-w_0|<\rho$中的二元函数. 设已知$F(z_0,w_0)=0$且$F(z_0,w)\not\equiv 0$，在此条件下有：存在着邻域$|z-z_0|<\gamma'<\gamma$，$|w-w_0|<\rho'<\rho$，在其中$F(z,w)$可表成下形

$$F(z,w)=[A_0(z)+\cdots+A_{k-1}(z)w^{k-1}+w^k]\Phi(z,w),$$

其中$A_i(z)\ (i=0,1,\cdots,k-1)$当$|z-z_0|<\gamma$时是解析函数，$k$是自然数等于诸导数$\frac{\partial F(z_0,w_0)}{\partial w^n}$ $(n=1,2,\cdots)$中异于零的那些导数之最低阶数；$\Phi(z,w)$是解析于域$|z-z_0|<\gamma'<\gamma$，$|w-w_0|<\rho'<\rho$中的函数，并且在这里它不等于零.

据此引理，当$p\geq 2$及$\frac{\partial^2 P^*(f,z)}{\partial f^2}\Big|_{z=0}=\frac{\partial^2 P^*(f(0),0)}{\partial Q^2}\neq 0$时，即$k=2$，因而由$P^*(Q,z)=0$确定的$Q(z)$在原点满足$Q(0)=f(0)$的分枝有且仅有两个. 为此我们讨论选择逼近唯一性的条件，使其逼近$f(z)$的阶最高.

引理2 设$p=2$，$P^*(f,z)=\sum_{i=0}^{2}a_i^*(z)f(z)^i=O(z^R)$，且$\sum_{i=0}^{2}|a_i^*(0)|\neq 0$；$\mathrm{Ord}\left(\frac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\right)=D$，$0<2D<R$；令$G(z)=a_1^*(z)^2-4a_2^*(z)a_0^*(z)$，则$\mathrm{Ord}(G(z))=2D$.

证明 因$\left(\frac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\right)^2-G(z)=4a_2^*(z)P^*(f,z)=O(z^R)$，又$\mathrm{Ord}\left(\left(\frac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\right)^2\right)=2D$，$0<2D<R$，从而$\mathrm{Ord}(G(z))=2D$.

注 引理2所设条件蕴含了$a_2^*(0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P^*(f,z)}{\partial f^2}\Big|_{z=0}\right)\neq 0$，否则易推得与$\sum_{i=0}^{2}|a_i^*(0)|\neq 0$相矛盾.

引理3 在引理2的条件下，则在原点的邻域内存在函数$Q(z)$的两个解析分枝$Q_i(z)\ (i=1,2)$，满足$P^*(Q,z)=0$及$Q(0)=f(0)$；并且有$Q_1^{(j)}(0)=Q_2^{(j)}(0)\ (j=0,1\cdots,D-1)$，但$Q_1^{(D)}$

$(0)\neq Q_2^{(D)}(0)$.

证明　由引理2 $G(z)=\alpha_{2D}z^{2D}+\alpha_{2D+1}z^{2D+1}+\cdots\ (\alpha_{2D}\neq 0)$, 于是

$$\sqrt{G(z)}=\sqrt{\alpha_{2D}}\,(z^D+\cdots). \tag{4}$$

因此, 由 $P^*(Q,z)=a_0^*(z)+a_1^*(z)Q+a_2^*(z)Q^2=0$ 及 $a_2^*(0)\neq 0$ 可得

$$Q_{1,2}(z)=\frac{-a_1^*(z)+\sqrt{G(z)}}{2a_2^*(z)}=\frac{-a_1^*(z)+\sqrt{\alpha_{2D}}\,(z^D+\cdots)}{2a_2^*(z)},$$

其中 $\sqrt{\alpha_{2D}}$ 按复数开平方来理解. 即在原点的邻域内得到了函数 $Q(z)$ 的两个解析分枝 $Q_i(z)$ 满足 $Q_i(0)=f(0)=-\dfrac{a_1^*(0)}{2a_2^*(0)}$ $(i=1,2)$; 并且显然有 $Q_1^{(j)}(0)=Q_2^{(j)}(0)\ (j=0,1,D-1)$, 但 $Q_1^{(D)}(0)\neq Q_2^{(D)}(0)$.

由此看出如果我们选择满足条件

$$Q^{(j)}(0)=f^{(j)}(0)\qquad (j=0,1,\cdots,D) \tag{5}$$

的函数 $Q(z)$ 作为 $f(z)$ 的 HPA, 唯一性得以保证, 存在性可见如下定理

定理1　在引理2的条件下, 则在原点的邻域内存在唯一的解析函数 $Q(z)$, 满足 $P^*(Q,z)=0$ 及条件(5); 并且 $Q(z)=f(z)+O(z^{R-D})$.

证明　由(4)式 $\sqrt{G(z)}=\sqrt{\alpha_{2D}}\,(z^D+\cdots)\ (\alpha_{2D}\neq 0)$. 又

$$P^*(f,z)=a_0^*(z)+a_1^*(z)f(z)+a_2^*(z)f(z)^2=O(z^R), \tag{6}$$

于是由(6)及引理3可得

$$f^{(j)}(0)=Q_i^{(j)}(0)=\left(\frac{-a_1^*(z)}{2a_2^*(z)}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=0}\quad \left(i=1,2;\ j=0,1,\cdots D-1\right), \tag{7}$$

而

$$f^{(D)}(0)=\left(-\frac{a_1^*(z)}{2a_2^*(z)}\right)^{(D)}\Bigg|_{z=0}+\sqrt{\alpha_{2D}}\,\frac{D!}{2a_2^*(0)}=Q^{(D)}(0), \tag{8}$$

其中 $\sqrt{\alpha_{2D}}$ 按复数开平方来理解. 故由(7), (8)可知在原点的邻城内满足 $P^*(Q,z)=0$ 及条件(5)的解析函数 $Q(z)$ 的存在唯一性得证; 余下关于 $Q(z)=f(z)+O(z^{R-D})$ 的证明可见[1].

当 $p>2$ 及 $\dfrac{\partial^2 P^*(f,z)}{\partial f^2}\Big|_{z=0}\neq 0$ 时, 由引理1知在 $|z|<\gamma'$, $|Q-f(0)|<\rho$ 内, $P^*(Q,z)$ 可表成 $P^*(Q,z)=[A_0^*(z)+A_1^*(z)Q+Q^2]\Phi(Q,z)$, 则 $P^*(Q,z)=0$ 等价于

$$F^*(Q,z)=A_0^*(z)+A_1^*(z)Q+Q^2=0. \tag{9}$$

同理, $P^*(f,z)=[A_0^*(z)+A_1^*(z)f(z)+f(z)^2]\Phi(f(z),z)=O(z^R)$. 因为 $\Phi(f(z),z)$ 解析, 且 $\Phi(f(0),0)\neq 0$, 于是有

$$F^*(f,z)=A_0^*(z)+A_1^*(z)f(z)+f(z)^2=O(z^R). \tag{10}$$

又当 $D<R$ 时, 再由 $\mathrm{Ord}\left(\dfrac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\right)=D$, 可得

$$\mathrm{Ord}\left(\frac{\partial F^*(f,z)}{\partial f}\right)=D. \tag{11}$$

注意到 $A_0^*(z)$, $A_1^*(z)$ 在原点的邻域内均为解析函数, 并由(9)—(11)式, 类同于定理1的证明可得如下定理

定理2 设 $p>2$, $P^*(f,z)=\sum_{i=0}^{p} a_i^*(z)f(z)^i=O(z^R)$, 满足 (Ⅰ) $\sum_{i=0}^{p}\left|a_i^*(0)\right|\neq 0$; (Ⅱ) $\mathrm{Ord}\left(\frac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\right)=D$, $0<2D<R$; (Ⅲ) $\left.\frac{\partial^2 P^*(f,z)}{\partial f^2}\right|_{z=0}\neq 0$, 则在原点的邻域内存在唯一的解析函数 $Q(z)$, 满足 $P^*(Q,z)=0$ 及条件(5), 并且

$$Q(z)=f(z)+O(z^{R-D}).$$

当 $\mathrm{Ord}(\partial P^*(f,z)/\partial f)=R/2$ 时, 在原点重合的分枝 $Q_i(z)$ $(i=1,2)$ 实际上是处处重合的[2].

综上所述, 当 $p\geq 2$、$2D\leq R$ 及在定理2的条件下, 我们把定义3中的初始条件(3)稍加改变为

$$Q^{(j)}(0)=f^{(j)}(0)\quad (j=0,1\cdots,t),\tag{12}$$

其中 $t=\begin{cases}D, & \text{当}\ 2D<R,\\ 0, & \text{当}\ 2D=R,\end{cases}$ 则满足方程(2)及初始条件(12)的 $f(z)$ 的HPA是唯一存在的, 且逼近阶升高到 $R-D$ $(\geq D)$.

例 设 $f(z)=\sin z$, $p=3$, $n=(-1,1,0,1)$, $N=4$, 则有

$$P^*(f,z)=-6zf(z)+6f^2(z)+zf^3(z)=O(z^6)\quad (R=6).$$

又 $\mathrm{Ord}\left(\frac{\partial P^*(f,z)}{\partial f}\right)=1$, $\left.\frac{\partial^2 P^*(f,z)}{\partial f^2}\right|_{z=0}=12\neq 0$, 由定理2知在原点的邻域内存在唯一的解析函数 $Q(z)=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{18}z^5-\frac{5}{216}z^7+\cdots=f(z)+O(z^5)$, 此分枝仅需条件 $Q^{(j)}(0)=f^{(j)}(0)$ $(j=0,1)$ 来选择

参 考 文 献

[1] Brookes R G and Mcinnes A W. *The existence and Local behaviour of the quadratic function approximation* [J]. J. Approx Theory, 1990, **62**: 383-395.

[2] Mcinnes A W. *Existence and Uniqueness of algebraic function approximations* [J]. Constr Approx, 1992, **8**: 1-21.

[3] A. H. 马库雪维奇. 解析函数论 [M]. 黄正中等译. 北京: 高等教育出版社, 1957.

Existence and Uniqueness of Algebraic Hermite-Padé Approximation in the Nonnormal Case

Qian Zeping   Zhu Gongqin

(Hefei University of Technology, 230009)

Abstract

We study the algebraic Hermite-Padé approximation to a locally analytic function $f(z)$ in the nonnormal case. Existence and uniqueness theorems under fairly general conditions are proved.

Keywords algebraic form, nonnormal, algebraic Hermite-Padé approximation.