

一类高阶非齐次发展方程的小波基数值分析*

柯熙政¹, 吴振森²

1. 中国科学院陕西天文台, 西安 710600;
2. 西安电子科技大学, 西安 710071

摘 要:根据实际中存在的一类发展方程,首先论述了这种方程的物理背景,然后导出了在小波基下发展方程的数值解,并阐述了解的存在性.最后举例说明了这种方程小波基数值解的应用.

关键词:发展方程;数值解;小波基.

分类号:AMS(1991) 65P05/CLC O241.82

文献标识码:A

文章编号:1000-341X(1999)03-0587-06

1 物理背景

在天体测量和电子技术领域,存在着这样一类信号,其能量基本集中在低频,随着信号频率的降低,信号的能量呈幂律增加的趋势,通常称为 $1/f^\alpha$ 过程,这类过程有着广泛的应用背景.

1.1 振荡器噪声

振荡器在电子技术中有着广泛的应用,其输出信号一般可表示为

$$y = u_0 \sin[2\pi(v_0 + v(t))t + \varphi(t)], \quad (1)$$

其中, v_0 是信号源的标称频率, $v(t)$ 是信号频率的随机波动, $\varphi(t)$ 是相位的随机波动, u_0 是信号幅度的标称值. $v(t) + \varphi(t)$ 表示振荡器的噪声,在描述振荡器的噪声模型中,幂律谱模型具有一定的典型性,将噪声在 Fourier 频域表示为

$$S_y = \sum_{\alpha=2}^2 h_\alpha f^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

在数学意义下,可以将噪声分为六项:频率随机游走,闪变噪声调频,白噪声调频,相位随机游走,闪变噪声调相和白噪声调相,可表示为

$$f(x) = \int dx \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + f_3(x) + \frac{df_4}{dx} + \frac{d^2 f_5}{dx^2} + \frac{d^3 f_6}{dx^3}, \quad (3)$$

式中 $f_i(x) (i=1, \dots, 6 \in \mathbb{Z})$ 是核函数,表示不同类型的噪声或与不同类型的噪声有关, $f(x)$ 是

* 收稿日期:1996-10-18;修订日期:1997-12-10

基金项目:中国科学院天文委员会基金资助项目(96305)

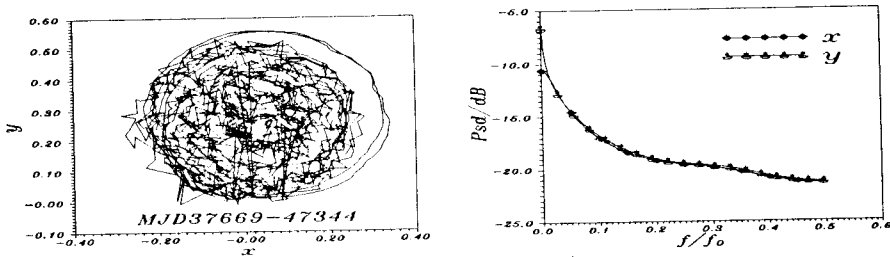
作者简介:柯熙政(1962-),男,博士,中国科学院陕西天文台副研究员.

测量值,已知. 其物理意义见表 1.

幂律谱模型是对噪声过程的统计描述,表达了各种噪声在频域的不同特征. 振荡器中的这几种噪声产生的物理背景各不相同,若依据其产生的不同的物理机制进行分解,可以对振荡器进行分类分别实时控制,而经典的滤波器做不到这一点.

1.2 天文测量中的低频信号

在天文测量中,许多信号都是周期变化的,如太阳黑子数,地球的极移等. 当我们将其低频信号进行滤波后,就是一种 $1/f^\alpha$ 过程,地球极移的功率谱如图(1)所示, x 和 y 方向的极移低频分量的功率谱几乎相同,它包含有 f^{-2} , f^{-1} , f^0 三种成份,我们的研究结果已经证明, f^{-2} , f^{-1} , f^0 三种过程的核函数与太阳活动及地震等地球动力学因素有关^[12]. 这样,为了研究日地空间各种现象的相互联系,需要对天体测量数据进行分解,这种分解满足(3)式的方程.



图(1)地球的极移及其功率谱

八十年代以来,一种称之为小波分析的时频分析方法引起了人们的广泛重视,它被誉为是数学上的显微镜和望远镜,它可以聚焦到待分析信号的任意细节,小波分析以不同的分辨率考察信号的变化特征,具有良好的时频分辨率. 本文根据小波分析的基本原理,用小波函数为基函数求解一类高阶非齐次发展方程,可以很方便的得到该方程(3)的数值解,按其产生的物理机制对信号进行分类.

表 1 幂律谱模型参数

噪声类型	谱指数	备 注
频率随机游走	$\alpha = -1$	
闪变调频	$\alpha = -1$	
白噪声调频	$\alpha = 0$	
相位随机游走	$\alpha = 0$	与白噪声调频的频谱分布相同
闪变调相	$\alpha = 1$	
白噪声调相	$\alpha = 2$	

2 小波基^[1,2]

小波变换是一个线性算子,能在不同尺度下对信号进行分解,小波变换是基于信号与伸缩

滤波器卷积. 若 $\varphi(x) \in L^2(R)$ 满足容许条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 0. \quad (4)$$

用尺度因子 s 对 $\varphi(x)$ 做伸缩, 得到伸缩后的小波函数记为

$$\varphi_s(x) = \frac{1}{s} \varphi\left(\frac{x}{s}\right). \quad (5)$$

信号 $f(x) \in L^2(R)$ 在尺度 s 位置 x 处的小波变换定义为如下的卷积

$$W_s f(x) = f(x) * \varphi_s(x), \quad (6)$$

式中, $s=2^j$, $L^2(R)$ 表示一维平方可积函数希尔伯特空间, $\varphi(x)$ 表示小波函数, $*$ 表示卷积. 定义一个任意光滑的函数 $\theta(x)$, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1, \quad (7)$$

可以选取光滑函数的导函数作为小波函数

$$\varphi_s(x) = \frac{d^n \theta(x)}{dx^n}. \quad (8)$$

这个光滑函数的 Fourier 变换为

$$\theta(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \right]^{-2n+2}, \quad (9)$$

一般取 $2n+1 \geq 3$, 由 (9) 式出发可以构造一类具有紧支集小波函数, 这个小波函数与一组滤波器相联系

$$|H(\omega)|^2 + G(\omega)K(\omega) = 1, \quad (10)$$

$$H(\omega) = \exp\left(\frac{i\omega}{2}\right) [\cos(\omega/2)]^{-2n+1}, \quad (11)$$

$$G(\omega) = 4i \exp(i\omega/4) \sin(\omega/2), \quad (12)$$

$$K(\omega) = \frac{1 - |H(\omega)|^2}{G(\omega)}, \quad (13)$$

这组滤波器的有限冲击响应系数如表 2 所示.

表 2 滤波器有限冲击响应

n	H	G	k
-3			0.0078125
-2			0.546875
-1	0.125	0	0.171875
0	0.375	-2	-0.171875
1	0.375	2	-0.0546875
2	0.125	0	-0.0078125

3 算子方程的解

对方程(3),用不同的小波函数对其做小波变换,用 n 个小波函数与信号进行小波变换,可以得到 n 个方程,这样就可将 n 个未知的分量进行分离.用小波函数和(3)式做内积运算

$$\langle f(x), \varphi_n(x) \rangle = a_n \quad (n = 1, \dots, 6 \in \mathbb{Z}), \quad (14)$$

式中 $\varphi_n(x)$ 是光滑函数 $\theta(x)$ 的阶导数, a_n ($n = 1, \dots, 6 \in \mathbb{Z}$) 是信号在相应的小波基函数下的小波变换系数.考虑到

$$f(x) * \varphi_n(x) = s^n f(x) * \theta(x), \quad (15)$$

对(14)式做 Fourier 变换,有

$$\begin{bmatrix} \frac{s\theta(\omega)}{(i\omega)^2} & \frac{s\theta(\omega)}{i\omega} & s\theta(\omega) & is\omega\theta(\omega) & s(i\omega)^2\theta(\omega) & s(i\omega)^3\theta(\omega) \\ \frac{s^2\theta(\omega)}{(i\omega)} & s^2\theta(\omega) & is^2\omega\theta(\omega) & s^2(i\omega)^2\theta(\omega) & s^2(i\omega)^3\theta(\omega) & s^2(i\omega)^4\theta(\omega) \\ s^3\theta(\omega) & is^3\omega\theta(\omega) & s^3(i\omega)^2\theta(\omega) & s^3(i\omega)^3\theta(\omega) & s^3(i\omega)^4\theta(\omega) & s^3(i\omega)^5\theta(\omega) \\ is^4\omega\theta(\omega) & s^4(i\omega)^2\theta(\omega) & s^4(i\omega)^3\theta(\omega) & s^4(i\omega)^4\theta(\omega) & s^4(i\omega)^5\theta(\omega) & s^4(i\omega)^6\theta(\omega) \\ s^5(i\omega)^2\theta(\omega) & s^5(i\omega)^3\theta(\omega) & s^5(i\omega)^4\theta(\omega) & s^5(i\omega)^5\theta(\omega) & s^5(i\omega)^6\theta(\omega) & s^5(i\omega)^7\theta(\omega) \\ s^6(i\omega)^3\theta(\omega) & s^6(i\omega)^4\theta(\omega) & s^6(i\omega)^5\theta(\omega) & s^6(i\omega)^6\theta(\omega) & s^6(i\omega)^7\theta(\omega) & s^6(i\omega)^8\theta(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \\ F_5(\omega) \\ F_6(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\omega) \\ A_2(\omega) \\ A_3(\omega) \\ A_4(\omega) \\ A_5(\omega) \\ A_6(\omega) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

记(16)式的系数矩阵为 B , 则

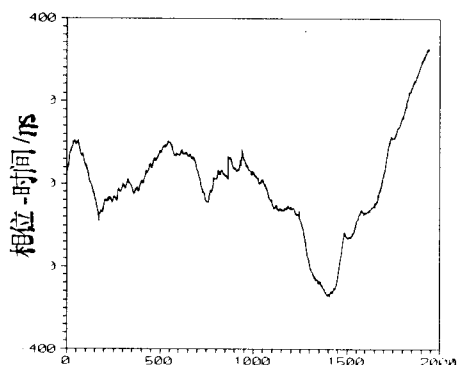
$$f = FT^{-1}\{B^{-1}A\} \quad (17)$$

求解上式就可得到求解的各项系数函数, FT^{-1} 表示 Fourier 逆变换.

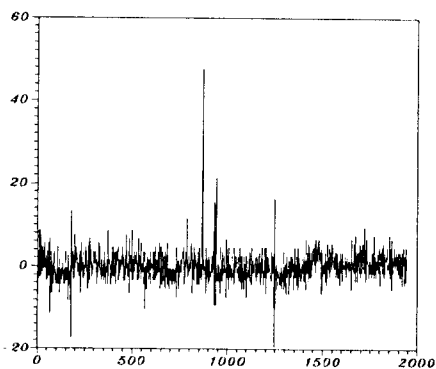
4 问题与讨论

4.1 振荡器噪声的分离

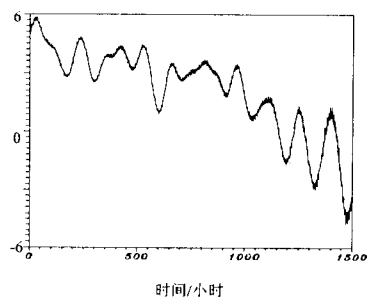
振荡器噪声满足幂律谱分布,不失一般性,仅考虑噪声中含有二种变化成份 f^{-1} 和 f^0 ,如图(3)所示,是某台原子钟的噪声,图(4)是白噪声调频分量,图(5)是闪变调频噪声.对振荡器噪声进行分解之后,有利于分析噪声产生的机制,并可进行控制.



图(2)某两台原子钟的钟差

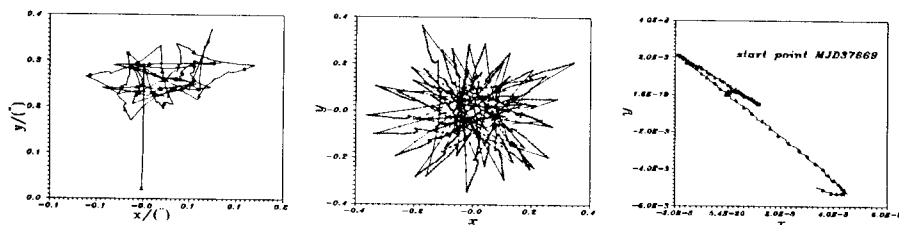


图(3) f^0 分量



图(4) f^{-1} 分量

4.2 地球极移的低频分量分离



图(5)地球极移中的 f^{-2} , f^{-1} , f^0 分量

地球极移及其频谱分布如图(1)所示,将 f^{-2} , f^{-1} , f^0 三种变化成分进行分离,其结果示于图(5). 通过这种分离,还发现了一些新的现象,发现 f^{-2} 和 f^{-1} 分量与地球极移的强得勒极移具有相同的周期,而 f^0 分量与太阳活动的变化化周期相同,对此将在专门的文章中讨论.

最后特别指出,通过选用特定的小波基函数,将信号中的不同变化成份进行了分离,这些

变化成分均满足方程(3),是(3)式的一个解. 正确判断实际信号中是否含有某一频率段的信号也是至关重要的. 但这种方法的完备性还有待于进一步研究.

参 考 文 献

- [1] 刘贵忠等. 小波分析及其应用 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1992.
- [2] 宋国乡等. 数值泛函及小波分析初步 [M]. 郑州:河南科学技术出版社,1993.
- [3] 秦前清等. 实用小波分析 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1994.

On Wavelet Base Solution of One Kind High Order Inhomogeneous Partial Differential Equation

KE Xi-zheng¹, WU Zhen-sen²

1. Shanxi Astronomical Observatory, Academia Sinical, Xi'an 710600;

2. Xidian University, 710071

Abstract: In this paper, the physical background of one kind highorder inhomogenous differential equation existed in physics is given. Wavelet base solution of the equation is presented, the existness of the solution is described. Finally, the example of the numerical solution of the equation is illustrated.

Key words: inhomogeneous partial differential equation; numerical solution; wavelet theory; numerical.