第19卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 19 No. 3
1999年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1999

超布朗运动：质量过程的极限行为及值空间的扩张*

郭军义[1]，　华仁海[2]

1. 南开大学数学所，天津 300071；
2. 南京经济学院统计系，210003

摘　要：本文给出了超布朗运动的质量过程在不灭绝条件下的极限分布的拉普拉斯变换的具体形式，并得出了在较一般的分支特征下使其值空间从 $M_F(R^d)$ 扩张到 $M_p(R^d)$ 的一个充分条件.

关键词：超布朗运动，质量过程，分布弱收敛，值空间.

分类号：AMS(1991) 60J80,60J65,60F05/CLC O211.62

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)03-0593-05

1　引　言

设 $M_F(R^d)$ 为 $\mathscr{B}(R^d)$ 上所有有限测度赋以弱拓扑构成的空间，$X(t)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P_\mu)$ 上的超布朗运动，即它是取值于 $M_F(R^d)$ 的强马氏过程，由如下的拉普拉斯泛函唯一确定：

$$E_\mu\exp(-\langle f,X_t\rangle)=\exp(-\langle\mu,u(t)\rangle),\tag{1}$$

其中 $u(t)$ 是下面发展方程的适度解

$$\begin{cases}\dot u(t)=\frac{1}{2}\Delta u-u^{1+\beta},\\ u(0)=f.\end{cases}\tag{2}$$

此处 $\mu\in M_F(R^d)$，$f\in C_b(R^d)_+$：R^d 上的非负有界连续函数全体. 如果令 $f=\lambda>0$，则 $u(t)=\lambda(1+\beta t\lambda^\beta)^{-1/\beta}$，因此

$$E_\mu e^{-\lambda X_t(R^d)}=\exp(-\mu(R^d)\lambda(1+\beta t\lambda^\beta)^{-1/\beta}),\tag{3}$$

$$P_\mu(X(t)=0)=\exp(-\mu(R^d)(\beta t)^{-1/\beta}).\tag{4}$$

此处简记零测度为 0. 由(4)可以知道以 P_μ 概率 1，$X(t)$ 终于会灭绝. 也就是说当 t 充分大时，$X(t)\neq 0$ 是稀有事件. 本文的第二部分就是要考虑在此稀有事件上，$X(t)$ 的质量过程 $X_t(R^d)$ 的极限行为. 找到了 t 的函数 a_t，使 $a_tX_t(R^d)$ 是弱收敛的. 另外设 $M(R^d)$ 表示 $\mathscr{B}(R^d)$ 上所有 Radon 测度构成的空间，且

$$M_p(R^d)=\{\mu\in M(R^d):(1+|x|^p)^{-1}\mathrm{d}\mu(x)\text{ 是有限测度}\},$$

* 收稿日期：1996-07-11

基金项目：国家自然科学基金项目(19801019)

作者简介：郭军义(1965-)，男，河北省鸡泽人，博士，南开大学数学系副教授.

则 Iscoe[5]得出了在分支特征 $\Phi(z)=-z^{1+\beta}$ 的情况下，$X(t)$ 的值空间可取为 $M_p(R^d)$. 本文第三节的目的就是要把此结果推广到更一般的分支特征，即

$$\Phi(z)=-\int_0^\infty (e^{-\lambda z}-1+\lambda z)n(\mathrm{d}\lambda), \tag{5}$$

其中 $n(\mathrm{d}\lambda)$ 是 $[0,\infty)$ 上的一个 Radon 测度，满足

$$n(\mathrm{d}\lambda)\sim c_\beta\lambda^{-2-\beta}\mathrm{d}\lambda, \text{当 } \lambda\to 0+ \text{ 时}, \tag{6}$$

这里 c_β 为只依赖于 β 的常数. 满足这个条件的 $\Phi(z)$ 在 Dawson 及 Vinogradov[6]中提到过. 那里 Dawson 给出了与此分支特征相联系的超布朗运动的几个猜想，将另文证明.

2 质量过程的极限性质

本节将讨论质量过程的极限行为. 设 $0\le T<\infty$, $\mu\neq 0$, 定义

$$P_T^\mu\{\cdot\}=P_\mu\{\cdot\,|X_s\neq 0, 0\le s\le T\}=P_\mu\{\cdot\,|X_T\neq 0\}. \tag{7}$$

把上述的概率测度限制在 $\mathscr{F}_t$ 上 $(0\le t<T)$，由(4)式可知

$$P^\mu_{T|\mathscr{F}_t}\{\cdot\}=P_\mu\left\{\cdot\left(\frac{1-\exp(-X_t(R^d)(\beta(T-t))^{-1/\beta}}{1-\exp(-\mu(R^d)(\beta T)^{-1/\beta}}\right)\right\}, \tag{8}$$

$P^\mu_{T|\mathscr{F}_t}$ 即为 P_T^μ 在 $\mathscr{F}_t$ 上的限制. 可以看到，在(8)式中若令 $T\to\infty$，则有

$$\lim_{T\to\infty}P^\mu_{T|\mathscr{F}_t}\{\cdot\}=\mu(R^d)^{-1}P_\mu(\cdot\,X_t(R^d)).$$

事实上，由 [1, 2] 知，存在一个概率测度 P_∞^μ，使得

$$P^\mu_{\infty|\mathscr{F}_t}\{\cdot\}=\mu(R^d)^{-1}P_\mu(\cdot\,X_t(R^d)).$$

这个概率 P_∞^μ 具有直观上的意义，即 $P^\mu\{\cdot\,|X_s\neq 0, 0\le s<\infty\}$. 下面给出主要结论

定理 2.1 令 $\mu\in M_F(R^d)\backslash\{0\}$. 则

(i) $t^{-1/\beta}X_t(R^d)$ 关于 P_t^μ 的分布当 $t\to\infty$ 时弱收敛于 Z_1 关于 P_t^μ 的分布，其中 Z_1 的拉普拉斯变换是 $1-\lambda\left(\frac{\beta}{1+\beta\lambda^\beta}\right)^{1/\beta}$.

(ii) 若 $a>1$，则 $t^{-1/\beta}X_t(R^d)$ 在 P_{at}^μ 下的分布当 $t\to\infty$ 时弱收敛于 Z_a 关于 P_a^μ 的分布，其中 Z_a 的拉普拉斯变换为

$$a^{1/\beta}\left\{(\lambda\beta^{1/\beta}+(a-1)^{-1/\beta})(1+[\lambda\beta^{1/\beta}+(a-1)^{-1/\beta}]^\beta)^{-1/\beta}-\lambda(\frac{\beta}{1+\beta\lambda^\beta})^{1/\beta}\right\}.$$

(iii) 若 $a>1$，则 $t^{-1/\beta}X_t(R^d)$ 在 P_∞^μ 下的分布当 $t\to\infty$ 时弱收敛于 Z_∞ 关于 P_∞^μ 的分布，其中 Z_∞ 的拉普拉斯变换是 $(\beta\lambda^\beta+1)^{-1-1/\beta}$.

证明 (i). 因为 $X_t(R^d)\in\mathscr{F}_t$，由(8)可知

$$\begin{aligned}&P_t^\mu\{\exp(-\lambda t^{-1/\beta}X_t(R^d))\}\\&=\frac{-\exp(-\mu(R^d)(\beta t)^{-1/\beta})+\exp(-\mu(R^d)\lambda t^{-1/\beta}(1+\beta\lambda^\beta)^{-1/\beta})}{1-\exp(-\mu(R^d)(\beta t)^{-1/\beta}}\\&\xrightarrow{t\to\infty}1-\lambda\left(\frac{\beta}{1+\beta\lambda^\beta}\right)^{1/\beta}.\end{aligned} \tag{9}$$

因此(i)成立.

(ii) 令 $\alpha > 1$，则利用 (7) 和 (8) 可得

$$P_\alpha^\mu\left(\exp(-\lambda t^{-1/\beta}X_t(R^d)\right)$$

$$= P^\mu\left[\exp(-\lambda t^{-1/\beta}X_t(R^d))\frac{1-\exp(-X_t(R^d)((\alpha-1)\beta t)^{-1/\beta})}{1-\exp(-\mu(R^d)(\beta\alpha t)^{-1/\beta}}\right]$$

$$= \frac{\exp(-\mu(R^d)\lambda t^{-1/\beta}(1+\beta\lambda^\beta)^{-1/\beta})}{1-\exp(-\mu(R^d)(\beta\alpha t)^{-1/\beta}} -$$

$$\frac{\exp\{-\mu(R^d)[\lambda+((\alpha-1)\beta)^{-1/\beta}]\{1+\beta[\lambda+((\alpha-1)\beta)^{-1/\beta}]^\beta\}^{-1/\beta}t^{-1/\beta}\}}{1-\exp(-\mu(R^d)(\beta\alpha t)^{-1/\beta}}$$

$$\xrightarrow{t\to\infty}\alpha^{1/\beta}\times\{(\lambda\beta^{1/\beta}+(\alpha-1)^{-1/\beta})\times$$

$$(1+[\lambda\beta^{1/\beta}+(\alpha-1)^{-1/\beta}]^\beta)^{-1/\beta}-\lambda(\beta)(1+\beta\lambda^\beta)^{1/\beta}\}. \tag{10}$$

(iii) 由(i)和 (ii)可知

$$P_\infty^\mu[\exp(-\lambda t^{-1/\beta}X_t(R^d))] = \lim_{\alpha\to\infty}P_\alpha^\mu[\exp(-\lambda t^{-1/\beta}X_t(R^d))]$$

$$= \lambda^{-1-\beta}(\beta+\lambda^{-\beta})^{-1-1/\beta}\exp\left(-\mu(R^d)t^{-1/\beta}(\beta+\lambda^{-\beta})^{-1/\beta}\right)$$

$$\xrightarrow{t\to\infty}\left(\beta\lambda^\beta+1\right)^{-1-1/\beta}. \tag{11}$$

3 值空间的扩张

首先给出本节的主要定理，即

定理 3.1 令 $\Phi(z)$ 满足条件(5)，(6)，$p>d$ 且存在 $\delta_0>0$ 使得 $\int_{\delta_0}^\infty \lambda^2 n(\mathrm{d}\lambda)<\infty$，则存在一个取值于 $M_p(R^d)$ 的右连左极的马氏过程(超布朗运动)，满足

$$E_\mu[\exp(-\langle\psi,X_t\rangle)] = \exp[-\langle u(t),\mu\rangle],$$

其中 $\mu\in M_p(R^d)$，$\psi\in C_p(R^d)_+$，$u(t)$ 是发展方程

$$\begin{cases}\dot{u}(t) = \Delta u(t) - \Phi(u(t)),\\ u(0) = \psi\end{cases}$$

的适度解. 这里 $C_p(R^d)$ 是 $M_p(R^d)$ 的对偶空间，即

$$C_p(R^d) = \{f\in C(R^d): \|f(x)|x|^p\|_\infty < \infty\}.$$

为证此定理，需证两个引理，设 $U_t\psi$ 是方程

$$u(t) = S_t\psi - \int_0^t S_{t-s}\Phi(u(s))\mathrm{d}s \tag{12}$$

的解，S_t 是布朗运动的转移半群，则有

引理 3.1 令 $\Phi(z)$ 满足(5)，(6)，$\psi\in C_0(R^d)_+$，$\|\psi\| = c$. 则对所有的 $t\geq 0$，

(i) $0\leq S_t\psi - U_t\psi\leq tS_t\Phi(\psi)$，

(ii) $U_t\psi\geq e^{-\Phi(c)t/c}S_t\psi$.

证明 (i)显然成立，只需证(ii).

令 $W(t) = e^{-\Phi(c)t/c}S_t$，$w(t) = W_t\psi$，$v(t) = U_t\psi - w(t)$，$u(t) = U_t\psi$. 对 $\psi\in D(\Delta)_+$，即布朗运动的无穷小算子的定义域，下面两个方程

$$\begin{cases} \dot{w} = \frac{1}{2}\Delta w(t) - \frac{\Phi(c)}{c}w(t), \\ w(0) = \psi \end{cases} \tag{13}$$

和

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{2}\Delta v(t) - \frac{\Phi(c)}{c}v(t) - \Phi(u(t)), \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

成立,这意味着

$$v(t) = \int_0^t W_{t-s}\left\{\frac{\Phi(c)}{c}u(s) - \Phi(u(s))\right\}\mathrm{d}s = \int_0^t W_{t-s}\left\{\left(\frac{\Phi(c)}{c} - \frac{\Phi(u(s))}{u(s)}\right)u(s)\right\}\mathrm{d}s. \tag{15}$$

注意到 $0 \leq u(t) = U_t\psi \leq \|U_t\psi\|_\infty \leq \|S_t\psi\|_\infty \leq \|\psi\| = c$ 就可得出

$$\frac{\Phi(c)}{c} - \frac{\Phi(u(s))}{u(s)} \geq 0.$$

因此 $v(t) \geq 0$. (ii)得证.

引理 3.2 令 $p > d$, $\psi \in C_p(R^d)_+$, $v(t,x) = S_t\psi(x)$, $u(t,x) = U_t\psi(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}|x|^p\psi(x) = l \in R^1$. 如果存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $\int_{\delta_0}^\infty \lambda^2 n(\mathrm{d}\lambda) < \infty$. 则

$$\lim_{x\to\infty}|x|^p v(t,x) = \lim_{|x|\to\infty}|x|^p u(t,x) = l.$$

证明 据[5]命题 2.3,只需证明 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^p u(t,x) = l$. 因为由上引理知

$$u(t,x) \geq v(t,x) - tS_t\Phi(\psi),$$

并注意 $\limsup\limits_{|x|\to\infty}|x|^p u(t,x) \leq l$ 是 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^p v(t,x) = l$ 及(12)式的直接推论,可知如能证明

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^p S_t\Phi(\psi) = 0. \tag{16}$$

则 $\liminf|x|^p u(t,x) \geq l$. 因此 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^p u(t,x) = l$.

下证(16)式成立.

可选 $\varepsilon > 0$ 使得 $n(\mathrm{d}\lambda) \leq c_\beta\lambda^{-2-\beta}\mathrm{d}\lambda$ 在 $[0,\delta]$ 上成立,此处 $\delta > 0$ 是依赖 ε 的常数. 因此

$$\begin{aligned} S_t\Phi(\psi) &\leq c_\beta S_t\left[\psi^{1+\beta}\int_0^{\delta\psi}\frac{e^{-\lambda} - 1 + \lambda}{\lambda^{2+\beta}}\mathrm{d}\lambda\right] + S_t\int_\delta^\infty(e^{-\lambda\psi} - 1 + \lambda\psi)n(\mathrm{d}\lambda) \\ &\leq M_1S_t\psi^{1+\beta} + S_t\int_\delta^\infty\frac{1}{2}(\lambda\psi)^2 n(\mathrm{d}\lambda) \leq M_1S_t\psi^{1+\beta} + M_2S_t\psi^2 \\ &\leq MS_t\psi^{1+\beta}, \end{aligned}$$

其中 $M_1 = c_\beta\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda} - 1 + \lambda}{\lambda^{2+\beta}}\mathrm{d}\lambda$, $M_2 = \frac{1}{2}\int_\delta^\infty\lambda^2 n(\mathrm{d}\lambda)$, M 是依赖于 M_1, M_2 的常数. 由[5]的命题 2.3, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^{p(1+\beta)}S_t\psi^{1+\beta} = l^{1+\beta}$. 因此

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^p S_t\Phi(\psi) \leq \lim_{|x|\to\infty}|x|^p MS_t\psi^{1+\beta} = \lim_{|x|\to\infty}\frac{M}{|x|^{p\beta}}\left(|x|^{p(1+\beta)}S_t\psi^{1+\beta}\right) = 0,$$

(16)得证.

有了上面的两个引理之后,就完全可以按[5]中证明定理 1.1 的方法去证明定理 3.1,,因此证明从略.

作者衷心感谢吴荣教授的指导与帮助.

参 考 文 献

[1] Evans S N and Perkins E. *Measure-valued Markov branching processes conditioned on nonextinction* [J]. Israel J. Math., 1990, **71**: 329—337.

[2] Roelly A and Rouault A. *Processus de Dawson-Watanabe conditionne par le futur lointain* [J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1989, **309**(I): 867—872.

[3] Fitzsimmons P J. *Construction and regularity of measure-valued branching processes* [J]. Israel J. Math., 1988, **64**: 337—361.

[4] Evans S N and Perkins E. *Absolute continuity results for super-processes with some applications* [J]. Tran. Am. Math. Soc., 1991, **325**: 661—681.

[5] Iscoe I. *A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes* [J]. Probab. Th. Rel. Fields, 1986, **71**: 85—116.

[6] Dawson D A and Vinogradov V. *Almost sure path properties of* $(2, d, \beta)$*-super-processes* [J]. Stoch. Proc. Appl., 1994, **51**: 221—258.

Super-Brownian Motion: The Limiting Behaviour of the Mass Process and the Extension of the State Space

GUO Jun-yi[1], HUA Ren-hai[2]

1. Dept. of Math., Nankai University, Tianjin 300071;

2. Nanjing Institute of Economics

Abstract: Under non-extinction conditions, we study the limiting behaviour of the mass process of the super-Brownian motion and give the clear formulation of the Laplace transformation of the limiting distribution. In the last part of the paper we give a sufficient condition under which the state space of the super-Brownian motion with a more general branching mechanism can be extended from $M_F(R^d)$ to $M_p(R^d)$.

Key words: super-Brownian motion; mass process; distributional weak convergence; state space.