第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

叠合度的缺方向性与边值共振问题的非平凡解*

张 福 保
(徐州师范大学数学系，江苏 221009)

摘 要：本文在无任何附加条件的情况下证明了叠合度也具有 Leray-Schauder 度的缺方向性质，完全解决了前人工作中的遗留问题. 作为这一结果的应用，证明了一类 m-点边值问题和 Duffing 方程周期边值问题非平凡解的存在性结果.

关键词：叠合度；缺方向性；非平凡解；边值问题.
分类号：AMS(1991) 34B10,34B15,55M25/CLC O175,O177.91
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(199)04-0693-06

1 引 言

我们知道，缺方向性是 Brouwer 度和 Leray-Schauder 度的一条非常重要的性质，应用这一性质以及度的可加性，可以得出方程有非零解的结果[1]. 因此，作为 Leray-Schauder 度的推广，叠合度是否有缺方向性质就自然为人们所关注. 王乃静[2]，韩志清[3]分别在某些限制条件下证明了这一性质. 本文则是在无任何附加条件的情况下证明了叠 合度也具有缺方向性质. 作为这一性质的应用，我们证明了近来为人们所关注的一类 m-点边值共振问题[5]和 Duffing 方程周期边值问题[6]存要非平凡解的结果.

2 叠合度的缺方向性质

本节所用记号与概念均和[4]一致.

定理1 设 X,Z 是 Banach 空间，叠合度 $D[(L,N),\Omega]$ 有定义. 如果存在 $y\in Z, y\neq 0$，使

$$Lx-Nx\neq\lambda y,\quad \forall\lambda\geqslant 0,\ x\in\partial\Omega, \tag{1}$$

则

$$D[(L,N),\Omega]=0.$$

证明 根据叠合度讨论的标准方法知，方程 $Lx=Nx$ 等价于方程 $x=Mx$，其中，$M:X\to X$，$Mx=Px+(JQ+K_{P,Q})Nx$，$x\in X$. 而 J,P,Q 及 $K_{P,Q}$ 的定义均见[4]. 由(1)可证：

$$x-Mx\neq\lambda(K_{P,Q}+JQ)y,\quad \forall\lambda\geqslant 0,\ x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

* 收稿日期：1996-09-05
作者简介：张福保(1961-)，男，江苏人，博士，徐州师范大学副教授.

若不然，$\exists\ \lambda_0\geqslant 0, x_0\in\partial\Omega$，使

$$x_0-Px_0-JQNx_0-K_{P,Q}Nx_0=\lambda_0(K_{P,Q}+JQ)y,$$

由 X 的直和分解关系 $X=\mathrm{Ker}L\oplus\mathrm{Ker}P$ 易知

$$x_0-Px_0-K_{P,Q}Nx_0=\lambda_0K_{P,Q}y, \tag{3}$$

$$JQNx_0+\lambda_0JQy=0. \tag{4}$$

由于 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$ 是同构映射，故由(4)得 $QNx_0+\lambda_0JQy=0$．用 L 作用于(3)两端可得

$$Lx_0-(I-Q)Nx_0=\lambda_0(I-Q)y.$$

从而，

$$Lx_0-Nx_0=\lambda_0y-QNx_0-\lambda_0Qy=\lambda_0y,$$

此与(1)矛盾．因此(2)成立．

最后，由 Leray-Schauder 度的缺方向性知，欲证 $D[(L,N),\Omega]=0$，只需证 $(K_{P,Q}+JQ)y\neq 0$．可以证明：

$$(L+J^{-1}P)(K_{P,Q}+JQ)=I,\ (K_{P,Q}+JQ)(L+J^{-1}P)=I,$$

由此即知，$y\neq 0\Rightarrow(K_{P,Q}+JQ)y\neq 0$．因此定理获证．

注 1 定理 1 表明，叠合度有完全意义上的缺方向性质，但文[2]，[3]则在某些限制条件下证明了这一结论．我们指出，这里的证明并不象 Brouwer 度或 Leray-Schauder 度的缺方向的证明那样是仅从度的基本性质获得的．

3 m-点边值共振问题非平凡解的存在性

先讨论一类 m-点边值共振问题

$$x''(t)=f(t,x(t),x'(t))+e(t),\quad 0<t<1, \tag{5}$$

$$x'(0)=0,\ x(1)=\sum a_ix(\xi_i) \tag{6}$$

的非平凡解的存要性问题．这里以及下文中的和号 $\sum$ 均指 $m-2$ 项之和 $\sum\limits_{i=1}^{m-2}$．

定理 2 设 $f:[0,1]\times R^2\to R$ 对 L^1 满足 Caratheodory 条件，$a_1,a_2,\cdots,a_{m-2}\geqslant 0$，且 $\sum a_i=1$，而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m-2}\in(0,1)$．假定

（Ⅰ） 存在 $p(t),q(t),r(t)\in L^1(0,1)$，使

$$|f(t,x,y)|\leqslant p(t)|x|+q(t)|y|+r(t),\quad \forall\ x,y\in R,\ a.e.\ t\in[0,1];$$

（Ⅱ） 存在常数 $R_1,R_2,0<R_1<R_2$，使

$$f(t,x,y)\geqslant 0,\quad \forall\ x,y\in R, x\geqslant -R_1,\ \text{a.e.}\ t\in[0,1];$$

$$f(t,x,y)\leqslant 0,\quad \forall\ x,y\in R, x\leqslant -R_2,\ \text{a.e.}\ t\in[0,1].$$

则对任何满足条件 $\sum a_i[\int_0^{\xi_i}(1-\xi_i)e(s)ds+\int_{\xi_i}^1e(s)(1-s)ds]=0$ 的 $e(t)\in L^1(0,1)$，当

$$\left[1+\frac{2\sum a_i(1-\xi_i)}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}\right](\|p\|_1+\|q\|_1)<1 \tag{7}$$

时，m-点值问题(5)，(6)在 $C^1[0,1]$中至少有一个非平凡解．

证明 记 $X=C^1[0,1]$, $Z=L^1(0,1)$, $L:\mathrm{dom}L\to Z$,

$$\mathrm{domL}=\{x\in W^{2,1}(0,1)\,|\,x'(0)=0,\ x(1)=\sum a_i x(\xi_i)\},$$

$Lx=x''$, $\forall\, x\in\mathrm{dom}L$. 其中, $C^1[0,1]$, $L^1(0,1)$ 和 $W^{2,1}(0,1)$ 分别为通常的一阶连续可微函数空间, Lebesgue 可积函数空间和 Sobolev 空间. 定义 $N:X\to Z$,

$$(Nx)(t)=f(t,x(t),x'(t))+e(t),$$

再定义投影算子 $Q:Z\to Z$,

$$(Qx)(t)=\frac{2}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}\sum a_i\left[\int_0^{\xi_i}(1-\xi_i)x(s)\mathrm{d}s+\int_{\xi_i}^1(1-s)x(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$P:X\to R,\ P=Q|_X.$$

不难验证, L,N,P,Q 满足定理 1 的要求, 其中, $J=-I$, 而 I 为恒等映象. 易见, 求(5), (6)的解等价于求 $Lx=Nx$ 的解, 也等价于求 M 的不动点, 这里,

$$Mx=Qx-QNx+K_{P,Q}Nx,\quad \forall\, x\in X.$$

下证方程族 $x=\lambda Mx$, $\lambda\in(0,1)$ 在 $C^1[0,1]$ 中先验有界. 事实上, 设 $\lambda\in(0,1)$, $x\in X$ 使得

$$x=\lambda Qx-\lambda QNx+\lambda K_{P,Q}Nx, \tag{8}$$

则必存在 $\xi_1\in[0,1]$, 使 $x(\xi_1)\leqslant R_1$. 若不然, 由(Ⅱ), $f(t,x(t),x'(t))\geqslant 0$, 故 $(Qx)(t)>0$, 且 $(QNx)(t)\geqslant 0$, $\forall\, t\in[0,1]$. 但注意到(8)等价于

$$(I-Q)x=\lambda K_{P,Q}Nx,\ (1-\lambda)Qx+\lambda QNx=0, \tag{9}$$

而(9)的第二式显然与上述结果相矛盾. 同样, 存在 $\xi_2\in[0,1]$, 使 $x(\xi_2)\geqslant -R_2$. 因而易证存在 $\xi\in[0,1]$, 使 $|x(\xi)|\leqslant R_2$. 于是,

$$\|x\|_\infty\leqslant R_2+\|x''\|_1\leqslant R_2+\|x''\|_\infty. \tag{10}$$

再由 $x'(0)=0$ 得

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_1. \tag{11}$$

又用 L 作用于(9)中第一式两端得:

$$x''(t)=\lambda f(t,x(t),x'(t))-\lambda Qf(t,x(t),x'(t)). \tag{12}$$

注意到条件(Ⅰ)及(10), (11)可得

$$\begin{aligned}|Qf(t,x(t),x'(t))|&\leqslant\frac{2}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}\Big[\int_0^{\xi_i}(1-\xi_i)|f(t,x(t),x'(t))|\mathrm{d}t+\\&\quad\int_{\xi_i}^1(1-t)|f(t,x(t),x'(t))|\mathrm{d}t\Big]\\&\leqslant\frac{2}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}\sum a_i(1-\xi_i)\int_0^1|f(t,x(t),x'(t))|\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{2\sum a_i(1-\xi_i)}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}[\|p\|_1\cdot\|x\|_\infty+\|q\|_1\cdot\|x'\|_\infty+\|r\|_1]\\&\leqslant\frac{2\sum a_i(1-\xi_i)}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}[(\|p\|_1+\|q\|_1)\|x''\|_1+\|p\|_1R_2+\|r\|_1].\end{aligned}$$

从而, 由(12)知

$$\|x''\|_1\leqslant(\|p\|_1+\|q\|_1)\|x''\|_1+\|p\|_1R_2+\|r\|_1+$$

$$\frac{2\sum a_i(1-\xi_i)}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}(\|p\|_1+\|q\|_1)\|x''\|_1+$$

$$\frac{2\sum a_i(1-\xi_i)}{\sum a_i(1-\xi_i^2)}(\|p\|_1\cdot R_2+\|r\|_1).$$

故由(7)知,∃ $C>0$,使 $\|x''\|\leqslant C$. 再据(10),(11)知,存在常数 $R_3>R_2$,使对任何 $\lambda\in(0,1)$及(8)的任何一个解 $x(t)$,有 $\|x\|_{C^1}<R_3$. 现在,不妨设 $x\neq Mx$,$\forall x\in\partial B_{R_3}$(其中 B_{R_3}为以 θ 为心,R_3 为半径的开球). 否则,结论已成立. 因此据同伦不变性得

$$D[(L,N),B_{R_3}]=d(I-M,B_{R_3},\theta)=1\,.$$

又不妨设 $Lx\neq Nx$,$\forall x\in B_{R_1}$. 下证

$$D[(L,N),B_{R_1}]=0.$$

事实上,有

$$Lx-Nx\neq\lambda,\quad \forall x\in\partial B_{R_1}.$$

若不然,存在 $x_0\in\partial B_{R_1}$,$\lambda_0>0$,使 $Lx_0-Nx_0=\lambda_0$,从而 $QNx_0+\lambda_0Q(1)=0$,即

$$\sum a_i\left\{\int_0^{\xi_i}(1-\xi_i)[f(t,x_0(t),x_0'(t))+\lambda_0]\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.\int_{\xi_i}^1(1-t)[f(t,x_0(t),x_0'(t))+\lambda_0]\mathrm{d}t\right\}=0.$$

但由 $x_0\in\partial B_{R_1}$知 $x_0(t)\geqslant -R_1$,$\forall t\in[0,1]$. 据(Ⅱ)式知,$f(t,x_0(t),x_0'(t))\geqslant 0$. 又 $\lambda_0>0$,上述等式不成立. 因此由定理 1 知,$D[(L,N),_{R_1}]=0$. 最后由叠合度的可加性与可解性知,定理 2 获证.

注 2 最近,有不少文章讨论 m-点边值问题的可解性问题,(参见[5]和作者的工作[6]及所附参考文献),但对非平凡解的讨论却尚未见到. 例如,文[5]仅在 $\sum a_i\neq 1$ 的情形即非共振情形讨论了(5),(6)的可解性问题,且所用方法对共振情形即 $\sum a_i=1$ 不适用.

下面再讨论 Duffing 方程周期边值问题

$$x''(t)+cx'(t)+g(t,x(t))=e(t),\tag{13}$$

$$x(0)=x(2\pi),\quad x'(0)=x'(2\pi)\,,\tag{14}$$

这里,c 是一个常数. 文[7]仅讨论了(13),(14)的可解性.

定理 3 设 $g:[0,2\pi]\times R\to R$ 对 $L^2(0,2\pi)$满足 Caratheodory 条件,$a\leqslant A$,$0<R_1<R_2$ 均为常数,使

$$g(t,x)\geqslant A,\forall x\geqslant -R_1 \text{ 和 a.e. } t\in[0,2\pi];$$

$$g(t,x)\leqslant a,\forall x\leqslant -R_2 \text{ 和 a.e. } t\in[0,2\pi].$$

又设存在常数 γ,$0<\gamma<1+c^2$,使 $\limsup\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{g(t,x)}{x}\leqslant\gamma$,对 $t\in[0,2\pi]$一致成立. 那么,对任何满足条件 $2\pi a\leqslant\int_0^{2\pi}e(t)\mathrm{d}t\leqslant 2\pi A$ 的 $e\in L^2(0,2\pi)$,Duffing 方程(13),(14)在 $C[0,2\pi]$中至少有一个非平凡解.

证明 定义 $g_1:[0,2\pi]\times R\to R$,$e_1:[0,2\pi]\to R$,

$$g_1(t,x)=g(t,x)-\frac{1}{2}(A+a); \quad e_1(t)=e(t)-\frac{1}{2}(A+a).$$

则 $g_1(t,x)$ 对 $L^2(0,1)$ 满足 Caratheodory 条件，且使

$$g_1(t,x)\geqslant\frac{1}{2}(A-a)\geqslant 0, \quad \forall\, x\geqslant -R_1, \text{和 a.e. } t\in[0,2\pi],$$

$$g_1(t,x)\leqslant\frac{1}{2}(a-A)\leqslant 0, \quad \forall\, x\leqslant -R_2, \text{和 a.e. } t\in[0,2\pi].$$

令 $X=C[0,2\pi]$，$N:X\to Z=L^2(0,2\pi)$，

$$(Nx)(t) = g_1(t,x(t)) - e_1(t).$$

定义 $L:\mathrm{dom}L\subset X\to Z$，$Lx=x''+cx'$，其中，

$$\mathrm{dom}L = \{x\in H^2(0,2\pi): \quad x(0)=x(2\pi),\ x'(0)=x'(2\pi)\},$$

再定义 $Q:Z\to Z$，$P:X\to X$，$P=Q|_X$，

$$(Qx)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t.$$

于是，方程(13)，(14)等价于方程

$$Lx + Nx = 0,$$

也等价于方程

$$x - Px + PNx + KP(I-Q)Nx = 0.$$

类似于[7]的证法，方程

$$x - \lambda Px + \lambda PNx + \lambda Kp(I-Q)Nx = 0, \quad \lambda\in(0,1), x\in X.$$

先验有界，设界为 R_3，不妨设

$$Lx + Nx \neq 0, \quad \forall\, x\in\partial B_{R_3},$$

由同伦不变性得

$$D[(L,-N),B_{R_3}] = 1,$$

又不妨设

$$Lx + Nx \neq 0, \quad \forall\, x\in\partial B_{R_1},$$

则与定理 2 证法相似，有

$$Lx + Nx \neq \lambda(-1), \quad \forall\, \lambda\geqslant 0 \text{ 和 } x\in\partial B_{R_1},$$

因此由定理 1 得，

$$D[(L,-N),B_{R_1}] = 0,$$

再由叠合度的可加性与可解性易知，方程(13)，(14)必在 $X\cap\mathrm{dom}L$ 中有非平凡解 $x(t)$，使 $R_1\leqslant\|x\|_\infty\leqslant R_3$. 证毕.

参考文献：

[1] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.

[2] 王乃静. 拓扑度计算及其应用 [J]. 数学年刊 A 辑，1987，8：311—318.

[3] HAN Zhi-qing. *An extension of Guo's theorem and applications* [J]. Northeasthern Math J，1991，7：480—485.

[4] GAINES R E, MAWHIN J L. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* [R]. Lecture Notes in Math, N. 568, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1977.
[5] GUPTA C P, NTOUYAS S K and TSAMATOS P Ch. *Solvability of an m-point boundary value problem for second order ordinary differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **189**: 585—601.
[6] ZHANG Fu-bao. *Existence of solution of an m-point boundary value problem for second order ordinary differential equations* [J]. 数学进展, 1996, **25**: 89—90.
[7] GUPTA C P, NIETO J J and SANCHEZ L. *Periodic solution of some lienard and Duffing equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1989, **140**: 67—82.

Lack of Direction Property of the Coincidence Degree and Applications

ZHANG Fu-bao
(Dept. of Math., Xuzhou Normal University, Jiangsu 221009)

Abstract: In this paper, the lack of direction property of the coincidence degree, which was proved partially in [3], is proved completely without any additional condition. As applications, the existence of nontrivial solutions of a class of m-point boundary value problem at resonance and periodic boundary value problem for Duffing equation is dicussed.

Key words: coincidence degree; the lack of property; nontrivial solution; boundary value problem.