第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

一类非线性二阶差分方程解的振动性*

张振国[1]， 俞元洪[2]

(1. 河北师范大学数学系，石家庄 050016；
2. 中国科学院应用数学研究所，北京 100080)

摘　要：本文建立了非线性二阶差分方程的若干振动准则，所得结果改进了文[5]中相应的定理.

关键词：二阶差分方程；振动；时滞.
分类号：AMS(1991) 39A10/CLC O175.7
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0699-05

1 引　言

考虑非线性二阶差分方程

$$\Delta(p_n\Delta y_n)+q_nf(y_{n-r_n})=0, n=0,1,2,\cdots, \tag{1}$$

其中$\{p_n\}$是正数序列，且$P_n\equiv\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{p_n}\to\infty, n\to\infty$；$\{q_n\}$是实数序列，$\{r_n\}$是整数序列，且使得

$$\lim_{n\to\infty}(n-r_n)=\infty, \Delta y_n=y_{n+1}-y_n, f\in C(R,R)\text{且}uf(u)>0(u\neq0).$$

序列$\{y_n\}$称为方程(1)的解，如果当$n\geqslant\min\limits_{i\geqslant0}(i-r_i)$时有定义且对充分大的$n$满足(1).

方程(1)的非平凡解称为振动的，如果对每一$n_0>0$，存在一$n\geqslant n_0$使得$y_ny_{n+1}\leqslant0$，否则，称它为非振动的.

二阶非线性差分方程解的振动性已有不少文章进行了讨论，例如，参看文[1]－[5]，本文目的是给出方程(1)解振动的充分条件，我们的结果推广了文[5]中的定理

2 主要结果

定理1　设

(i)　$q_n\geqslant0$且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_n=\infty$；

---

* 收稿日期：1996-12-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19571023)
作者简介：张振国(1944-)，河北安国市人，硕士，河北师范大学教授.

(ii) $\liminf\limits_{|u|\to\infty}|f(u)|>0$,

则方程(1)的一切解振动.

证明 假设方程(1)有非振动解$\{y_n\}$,不妨设$\{y_n\}$最终为正,否则,y_n和$f(u)$可分别由$-y_n$和$-f(-u)$代替,则存在一正整数n.使得

$$y_{n-r_n}>0,n\geqslant n_0. \tag{2}$$

由方程(1)得到

$$\Delta(p_n\Delta y_n)=-q_nf(y_{n-r_n})\leqslant 0,n\geqslant n_0,$$

则$\{p_n\Delta y_n\}$是最终非增序列,断言

$$p_n\Delta y_n\geqslant 0,n\geqslant n_0. \tag{3}$$

事实上,若存在$n_1\geqslant n_0$使得$p_{n_1}\Delta y_{n_1}=c<0$,且$p_n\Delta y_n\leqslant c,n\geqslant n_1$,即$\Delta y_n\leqslant\frac{c}{p_n}$,因此

$$y_n\leqslant y_{n_1}+c\sum_{k=n_1}^{n-1}\frac{1}{p_k}\to-\infty,n\to\infty,$$

上式与假设$\{y_n\}$最终为正相矛盾,因此,(3)成立,故有当$n\geqslant n_0$时

$$y_{n-r_n}>0,\Delta y_n\geqslant 0 \text{ 和 } \Delta(p_n\Delta y_n)\leqslant 0.$$

令$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=L$,则$L>0$,下面分两种情况讨论:

(Ⅰ) L为有限数

从$f(u)$的连续性有

$$\lim_{n\to\infty}f(y_{n-r_n})=f(L)>0,$$

存在正整数$n_2\geqslant n_1$使得

$$f(y_{n-r_n})>\frac{1}{2}f(L),n\geqslant n_2. \tag{4}$$

将(4)代入(1)得到

$$\Delta(p_n\Delta y_n)+\frac{1}{2}f(L)q_n\leqslant 0,n\geqslant n_2. \tag{5}$$

对(5)两边求和产生

$$p_{n+1}\Delta y_{n+1}-p_{n_2}\Delta y_{n_2}+\frac{1}{2}f(L)\sum_{k=n_2}^{n}q_k\leqslant 0.$$

注意到(3),由上式得

$$\frac{1}{2}f(L)\sum_{k=n_2}^{n}q_k\leqslant p_{n_2}\Delta y_{n_2},n\geqslant n_2.$$

此与定理的条件(i)矛盾

(Ⅱ) $L=\infty$

根据定理的条件(ii),有

$$\liminf_{n\to\infty}f(y_{n-r_n})>0,$$

故存在常数$C>0$和整数$n_3\geqslant n_2$,使得

$$f(y_{n-r_n})\geqslant C,n\geqslant n_3. \tag{6}$$

将(6)代入(1)产生

$$\Delta(p_n\Delta y_n)+Cq_n\leqslant 0,n\geqslant n_3. \tag{7}$$

注意到(7)与(5)的类似,因此,利用类似的讨论我们可以得到与定理的条件(i)的矛盾,定理 1 证毕.

定理 2 设 $q_n\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_nq_n=\infty$,则方程(1)的一切有界解振动.

证明 假设方程(1)存在有界非振动解$\{y_n\}$.

利用与定理 1 证明中相同的讨论,得到不等式(5),因此

$$P_n\Delta(p_n\Delta y_n)+\frac{1}{2}f(L)P_nq_n\leqslant 0,n\geqslant n_2. \tag{8}$$

不难验证下面的不等式

$$P_n\Delta(p_n\Delta y_n)\geqslant\Delta(P_np_n\Delta y_n)-p_n\Delta y_n\Delta P_n. \tag{9}$$

注意到 $p_n\Delta P_n=1$,联合(8)和(9)产生

$$\sum_{k=n_2}^{n}\Delta(P_kp_k\Delta y_k)-\sum_{k=n_2}^{n}\Delta y_k+\frac{1}{2}f(L)\sum_{k=n_2}^{n}P_kq_k\leqslant 0,n\geqslant n_2.$$

由上式推知

$$\frac{1}{2}f(L)\sum_{k=n_2}^{n}P_kq_k\leqslant y_{n+1}-y_{n_2}+P_{n_2}p_{n_2}\Delta y_{n_2},n\geqslant n_2.$$

因$\{y_n\}$有界,故存在常数 C 使得

$$\sum_{k=n_2}^{n}P_kq_k\leqslant c.\ \forall\ n\geqslant n_2.$$

与定理的假设矛盾,证毕.

定理 3 设

(i) $(n-r_n)$非减,$r_n\in\{0,1,2,\cdots\}$;

(ii) 存在$\{p_n\}$的子序列$\{p_{nk}\}$使得 $p_{nk}\leqslant 1,k=0,1,2,\cdots$;

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_n=\infty$;

(iv) f 非减且存在非负常数 M,使得

$$\limsup_{u\to 0}\frac{u}{f(u)}=M, \tag{10}$$

则(1)的任一解$\{y_n\}$的差分$\{\Delta y_n\}$是振动的.

证明 设不然,则方程(1)存在一个解$\{y_n\}$,其差分$\{\Delta y_n\}$是非振动的,不妨设序列$\{\Delta y_n\}$是最终为负,则存在一正整数 n_0 使得 $\Delta y_n<0,n\geqslant n_0$.因此,序列$\{y_n\}$单调减少$(n\geqslant n_0)$,即知$\{y_n\}$也是非振动的,令

$$z_n=\frac{p_n\Delta y_n}{f(y_{n-r_n})},n\geqslant n_0 \tag{11}$$

则

$$\begin{aligned}\Delta z_n&=\frac{p_{n+1}\Delta y_{n+1}}{f(y_{n+1-r_{n+1}})}-\frac{p_n\Delta y_n}{f(y_{n-r_n})}\\&=\frac{\Delta(p_n\Delta y_n)}{f(y_{n-r_n})}+p_{n+1}\Delta y_{n+1}\frac{f(y_{n-r_n})-f(y_{n+1-r_{n+1}})}{f(y_{n+1-r_{n+1}})f(y_{n-r_n})}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\Delta(p_n \Delta y_n)}{f(y_{n-r_n})} = -q_n, n \geqslant n_0. \tag{12}$$

从 n_0 到 n 对(12)两边求和，有

$$z_{n+1} - z_{n_0} \leqslant -\sum_{k=n_0}^{n} q_k,$$

由定理的条件(iii)，得到

$$\lim_{n\to\infty} z_n = -\infty. \tag{13}$$

注意到(11)，存在 $n_1 \geqslant n_0$ 使得当 $n \geqslant n_1$ 时有

$$f(y_{n-r_n}) > 0 \text{ 和 } y_{n-r_n} > 0. \tag{14}$$

由(13)取 $n_2 \geqslant n_1$ 使得

$$z_n \leqslant -(M+1), n \geqslant n_2. \tag{15}$$

联合(11)和(15)有

$$p_n \Delta y_n + (M+1) f(y_{n-r_n}) \leqslant 0, n \geqslant n_2. \tag{16}$$

注意到(14)，令

$$\lim_{n\to\infty} y_n = L,$$

则 $L \geqslant 0$，现证：$L=0$，如果 $L>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(y_{n-r_n}) = f(L) > 0,$$

存在 $n_3 \geqslant n_2$，使得

$$f(y_{n-r_n}) > \frac{1}{2} f(L), n \geqslant n_3. \tag{17}$$

将(17)代入(16)，得到

$$\Delta y_n + \frac{1}{2p_n}(M+1) f(L) \leqslant 0, n \geqslant n_3. \tag{18}$$

从 n_3 到 n 对(18)两边求和产生

$$y_{n+1} - y_{n_3} + \frac{1}{2}(M+1) f(L) \sum_{k=n_3}^{n} \frac{1}{p_k} \leqslant 0. \tag{19}$$

由条件(ii)和(19)知

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

上式与(14)矛盾，因此

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

联合上式和条件(iv)，有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{y_{n-r_n}}{f(y_{n-r_n})} \leqslant M.$$

选取 $n_4 \geqslant n_3$，使得 $\frac{y_{n-r_n}}{f(y_{n-r_n})} < M+1, n \geqslant n_4$，即

$$y_{n-r_n} < (M+1) f(y_{n-r_n}), n \geqslant n_4.$$

由(16)产生

$$p_n \Delta y_n + y_{n-r_n} < 0, n \geqslant n_4. \tag{20}$$

注意到条件(ii)，存在$\{p_n\}$的子序列$\{p_{nk}\}$，使得$p_{nk} \leqslant 1, k=0,1,2,\cdots$，由(20)得到

$$y_{n_{k+1}} - y_{n_k} + y_{n_k - r_{nk}} \leqslant p_{n_k}(y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) + y_{n_k - r_{nk}} < 0,$$

对k充分大成立，因$\{y_n\}$单调减少$(n \geqslant n_0)$，有

$$0 < y_{n_{k+1}} + (y_{n_k - r_{nk}} - y_{nk}) < 0, k \text{ 充分大},$$

显然，这是矛盾.

对于序列$\{\Delta y_n\}$是最终为正的情形，可以类似地处理，定理3证毕.

参考文献:

[1] HOOKER J W and PATULA W T. *Second order nonlinear difference equations: oscillation and asymptotic behaviour* [J]. J. Mafh. Anal. Appl., 1983, **91**: 9—29.

[2] HOOKER J W, WONG M K and PATULA W T. *Oscillatory second order linear difference equations and Riccati equations* [J]. SIAM J. Math. Anal., 1987, **18**: 54—63.

[3] POPENDA J. *Oscillation and nonoscillation theorems for second order difference equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1987, **123**: 34—38.

[4] SZMANDA B. *Oscillation criteria for second order nonlinear equations* [J]. Ann. Polon. Math., 1983, **43**: 225—235.

[5] WANG Z and YU J. *Oscillation criteria for second order nonlinear difference equations* [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1991, **34**: 313—319.

Oscillation of Solutions to a Class of Nonlinear Second Order Difference Equations

ZHANG Zhen-guo[1], **YU Yuan-hong**[2]

(1. Dept. of Math., Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016;

2. Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract: Oscillation criteria for nonlinear second order difference equations are established, Results obtained improve theorems in the literature[5].

Key words: second order difference equation; oscillation; delay.