第19卷第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 19 No. 4
1999年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1999

Noether 环上加性秩函数的分解*

李 劲 松
(复旦大学数学研究所，上海 200433)

摘 要：本文利用局部化的方法，由 Artin 环上加性秩函数的分解形式决定了 Noether 环上所有加性秩函数的形式(与[1]相同)，且在同一模范畴中刻画了原子秩函数的意义，得出一新的结论.

关键词：Noether 环；加性秩函数；分解.
分类号：AMS(1991) 16P40,16P50/CLC O153.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0719-04

0 引 言

如同线性空间中的维数，Noether 环上诸如约化秩(reduced rank)之类的加性秩函数是研究环与模范畴的重要工具. G. Krause 在[1]中研究了 Noether 环上加性秩函数，给出了其分解形式. 然而对有限生成右 R-模 M，原子秩函数 ρ^i(见[1])在 M 上的值 $\rho^i(M)$究竟反映 M 的什么内部性质在[1]中是不清楚的. 本文首先给出容易得到的半单 Artin 环上加性秩函数的分解，然后利用局部化的方法将这一思想提升到任意右 Noether 环，作出了一般 Noether 环上加性秩函数的分解，与[1]的结果完全一致，但从这里的分解可在同一模范畴中刻画原子秩函数的意义，揭示 $\rho^i(M)$与 M 的内在联系，并得出一新的结论：半素右 Noether 环 R 上有限生成的 torsion-free 模的相关素理想均为 R 的极小素理想.

1 加性秩函数的分解

本文所考虑的环均为有单位元 1 的结合环，模均指酉式(unitary)右模. 符号及标准的术语请参阅[1]、[3]与[4].

设 R 为环，一个函数 λ 对每个有限生成 R-模 M 指定一个非负整数 $\lambda(M)$，使得对每个有限生成 R-模的短正合列 $O \to N \to M \to L \to O$ 有 $\lambda(M)=\lambda(N)+\lambda(L)$，则称 λ 为一个加性秩函数. 它在有限生成 R-模的同构类上的值是恒定的[1].

对半单 Artin 环 R，设 $R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$，$R_i$ 为单环，一个有限生成 R-模 M 是它的齐次分量的直和：

* 收稿日期：1996-12-02
作者简介：李劲松(1962-)，男，安徽桐城人，硕士，副研究员.

$M=\bigoplus_{i=1}^{n}H_i$，其中 $H_i=\bigoplus_{j=1}^{t_i}H_{ij}$，$H_{ij}$ 为互相同构的单 R_i- 模，$1\leqslant j\leqslant t_i$. 定义 $\rho^i(H_{jk})=\begin{cases}1,j=i\\0,j\neq i\end{cases}$，则 $\rho^i(M)=\mathrm{length}(H_i)$（半单模 H_i 的完全分解中单直和项的个数）是加性秩函数，$1\leqslant i\leqslant n$. 对 R 上任一加性秩函数 λ，有 $\lambda(M)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(H_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(H_{i1})\rho^i(M)=(\sum_{i=1}^{n}\lambda(H_{i1})\rho^i)(M)$，即得出半单 Artin 环 R 上任意加性秩函数的分解：$\lambda=\sum_{i=1}^{n}k_i\rho^i$，$k_i$ 为非负整数. 利用 Goldie 定理，将此想法提升到任意右 Noether 环，即可得到其上加性秩函数的分解.

设 R 为右 Noether 环，min-spec$(R)=\{P_1,\cdots\cdots,P_n\}$，为 R 的极小素理想集，则 R 的幂零根 $N=\bigcap_{i=1}^{n}P_i$. R/N 为半素环，由 Goldie 定理，R/N 有半单 Artin 的经典右商环 $Q(R/N)$，且 $Q(R/N)\cong\bigoplus_{i=1}^{n}Q(R/P_i)$，$Q(R/P_i)$ 为单 Artin 环.

先假设 R 为半素的，则 R 有半单 Artin 的经典右商环 $Q(R)$.

引理 1.1 任一有限生成 $Q(R)$- 模 M 均是某个有限生成 R- 模 M' 的局部化，即 $M\cong M'\otimes_R Q(R)$；且任一有限生成 $Q(R)$- 模的短正合列也是某个有限生成 R- 模的短正合列的局部化.

证明 设 $M=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot Q(R)$，$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ 是 M 的一组生成元，取 $M'=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot R$ 即可. 对短正合列亦类似证明.

推论 1.2 Mod-R 上的加性秩函数 λ 可诱导 Mod-$Q(R)$ 上的加性秩函数 λ'，即定义 $\lambda'(M)=\lambda(M')$，M,M' 同上.

证明 将 M' 视为 M 的 R- 子模，这样 λ' 即为 Mod-$Q(R)$ 上的加性秩函数. 首先验证定义合理，即若存在有限生成 R- 子模 N'，使得 $M\cong N'\otimes_R Q(R)$，则有 $\lambda(M')=\lambda(N')$. 不妨设 $M'\subseteq N'$，由 $0\to M'\to N'\to N'/M'\to 0$ 正合，$M'\otimes_R Q(R)\cong N'\otimes_R Q(R)$ 及 $Q(R)$ 平坦知，$N'/M'\otimes_R Q(R)=0$，则 $\rho(N'/M')=0$（ρ 为约化秩），从而 $\lambda(N'/M')=0$[1, 引理 1.3]，即 $\lambda(M')=\lambda(N')$. 再由上引理及 λ 的加性可得 λ' 的加性.

引理 1.3 对应于约化秩 ρ 的 Gabriel 拓扑 F 即为对应于 $C(0)$（R 的正则元集）的 1- 拓扑，即 $F=\{A\leqslant R_R\mid A\cap C(0)\neq\Phi\}$，且为 R 上的 Goldie 拓扑与 dense 拓扑.

证明 由[2，命题 2.1]知 $F=\{A\leqslant R_R\mid\rho(R/A)=0\}=\{A\leqslant R_R\mid R/A$ 是 $C(0)$-torsion$\}$，由 Goldie 定理可证 $F=\{A\leqslant R_R\mid A\cap C(0)\neq\Phi\}=\{A\leqslant R_R\mid A\lhd R_R$，即 A 为 R 的本质右理想$\}$ 为 Goldie 拓扑. 又 R 是 $C(0)$-torsion-free，即 Goldie torsion-free，知 R 非奇异，则 F 等于 dense 拓扑[3, 推论 Ⅵ. 6. 8].

由 Goldie 定理易得

引理 1.4 设 Q,P 分别为 R 的素理想与极小素理想，则 $Q\cap C(P)=\Phi\Leftrightarrow Q=P$. 其中 $C(P)=\{c\in R\mid cx\in P$ 及 $xc\in P$ 均蕴含着 $x\in P\}$.

引理 1.5 设 U 为 R- 模 M 的 torsion-free 一致子模，且 $\mathrm{Ass}(U)=\Gamma(U)=\{r\in R\mid U\cdot r=0\}$，则 $U\otimes_R Q(R)\cong Q(R/P_i)$ 的某一极小右理想 $\Leftrightarrow\mathrm{Ass}(U)=P_i$.

证明 记 $\mathrm{Ass}(U)=Q$. 因 $Q(R)\cong\bigoplus_{i=1}^{n}Q(R/P_i)$（$R$ 半素），有

$$U \otimes_R Q(R) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} U \otimes_R Q(R/P_i).$$

由 $U \otimes_R Q(R)$ 为单 $Q(R)$- 模知，$U \otimes_R Q(R/P_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中有且仅有一项不为零，设 $U \otimes_R Q(R/P_i) \neq 0$，则 $U \otimes_R Q(R/P_i) \neq 0 \Leftrightarrow U$ 不是 $C(P_i)$-torsion[1，命题 2.2]. 由引理 1.3 及 Gabriel H- 条件[2，命题 1.5] 易证：U 不是 $C(P_i)$-torsion$\Leftrightarrow Q \cap C(P_i) = \Phi$. 由引理 1.4 可得结论.

推论 1.6 设 M 为有限生成 torsion-free 右 R- 模，则 M 的相关素理想均为 R 的极小素理想，即 $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \text{min-spec}(R)$.

证明 设 $L = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 为 M 的本质子模，m 为 M 的 Goldie 维数，U_i 为 M 的一致子模，不妨设 $\mathrm{Ass}(U_i) = \Gamma(U_i)$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则 $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(L) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Ass}(U_i)$，由上即得.

现设 R 为任意右 Noether 环，我们给出 R 上任意加性秩函数的分解.

定理 1.7 设 $\text{min-spec}(R) = \{P_1, \cdots, P_n\}$，则存在 n 个基本加性秩函数 ρ^i，$1 \leqslant i \leqslant n$，使得约化秩 $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho^i$，且对 R 上任一加性秩函数 λ 有 $\lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i \rho^i$，$k_i = \lambda(R/P_i)/\dim(R/P_i)$ 为非负整数，dim 表示一致维数(Goldie 维数).

证明 首先 λ 可自然导出半素环 R/N 上的加性秩函数，设其诱导的半单 Artin 环 $Q(R/N)$上的加性秩函数为 λ'(推论 1.2)，由前述知 $\lambda' = \sum_{i=1}^{n} k_i \rho_i'$，其中 ρ_i' 的定义同前. 对有限生成右 R/N- 模 M，有 $\lambda(M) = \lambda'(M \otimes_{R/N} Q(R/N)) = \sum_{i=1}^{n} k_i \rho_i'(M \otimes_{R/N} Q(R'/N))$. 令 $\rho_{R/N}^i(M) = \rho_i'(M \otimes_{R/N} Q(R/N))$，易见 $\rho_{R/N}^i$ 为半素环 R/N 上的加性秩函数. 不妨设 M 为 torsion-free 模，$\dim(M) = m$，令 $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ 为 M 的本质子模，U_i 为 M 的一致子模，且不妨设 $\mathrm{Ass}(U_i) = \Gamma(U_i)$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则

$$M \otimes_{R/N} Q(R/N) = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i \otimes Q(R/N),\ \rho_i'(M \otimes_{R/N} Q(R/N)) = \sum_{j=1}^{m} \rho_i'(U_j \otimes Q(R/N)).$$

由引理 1.5 及 ρ_i' 的定义知，$\rho_i'(U_j \otimes Q(R/N)) = \begin{cases} 1, \mathrm{Ass}(U_j) = P_i/N \\ 0, \mathrm{Ass}(U_j) \neq P_i/N \end{cases}$，这样 $\rho_{R/N}^i(M)$ 则为 $U_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 中满足 $\mathrm{Ass}(U_j) = P_i/N$ 的个数，且 $\lambda(M) = \sum_{i=1}^{n} k_i \rho_{R/N}^i(M)$. 对有限生成右 R- 模 M，定义 $\rho^i(M) = \sum_{j=0}^{K-1} \rho_{R/N}^i(MN^j/MN^{j+1})$，其中 K 为幂零根 N 的幂零性指数，则 ρ^i 为加性秩函数 (cf. [4, 定理 2.2(a)]). 由 λ 的加性有 $\lambda(M) = \sum_{j=0}^{K-1} \lambda(MN^j/MN^{j+1}) = \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i=1}^{n} k_i \rho_{R/N}^i(MN^j/MN^{j+1}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{j=0}^{K-1} \rho_{R/N}^i(MN^j/MN^{j+1}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \rho^i(M)(MN^j/MN^{j+1}$ 可视为 R/N- 模) 即 $\lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i \rho^i$. 下面确定系数 k_i. 只需考虑 R 为半素的情形. 设 U/P_i 为 R/P_i 的任一一致右理想，易见 R/P_i 为有限生成 torsion-free 右 R- 模，由 $\mathrm{Ass}(U/P_i) = P_i$(cf. [4，引理

Ⅶ. 1.7]) 知 $\rho^j(U/P_i)=\begin{cases}1, j=i\\0, j\neq i\end{cases}$,从而 $k_i=\lambda(U/P_i)$,则 $k_i=\lambda(R/P_i)/\dim(R/P_i)$[1,引理 1.2]. 由 R/P_i 为 torsion-free 知 $\rho(R/P_i)=\dim(R/P_i)$,即 $\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho^i$.

2 两种分解的等价性

只需考虑 R 为半素右 Noether 环. 对有限生成右 R-模 M,在[1]中 $\rho^i(M)=\text{length}(M\otimes_R Q(R/P_i))=$ 半单模 $M\otimes_R Q(R/P_i)$ 的完全分解中单直和项的个数 $=M\otimes_R Q(R/P_i)$ 的完全分解中同构于 $Q(R/Pi)$ 的极小右理想的直和项之个数 = 半单模 $M\otimes_R Q(R)$ 的完全分解中同构于 $Q(R/Pi)$ 的极小右理想的直和项之个数. 不妨设 M 为 torsion-free 模,以下完全同上定理中的假设,则 $M\otimes_R Q(R)=(\bigoplus_{i=1}^{m}U_i)\otimes_R Q(R)=\bigoplus_{i=1}^{m}(U_i\otimes_R Q(R))$,因 $U_i\otimes_R Q(R)$ 均为单 $Q(R)$-模,故该等式为 $M\otimes_R Q(R)$ 的完全分解式,从而 length$(M\otimes_R Q(R/P_i)$ 等于 $U_1\otimes_R Q(R),\cdots,U_m\otimes_R Q(R)$ 中同构于 $Q(R/P_i)$ 的极小右理想的项数,由引理 1.5 即得 $\rho^i(M)$ 等于 $U_1,\cdots,U_m$ 中满足 $\text{Ass}U_j=P_i$ 的 U_j 之个数.

感谢导师许永华的教诲与指导,特别感谢吴泉水副教授的帮助.

参考文献:

[1] KRAUSE G. *Additive rank functions in Noetherian rings* [J]. J. Algebra, 1990, **130**: 451—461.

[2] KRAUSE G. *Additive rank functions and Gabriel filters in right Noetherian rings* [J]. J. Algebra, 1990, **134**: 36—44.

[3] STENSTROM B. *Rings of quotients* [M]. Springer-Verlag, 1975.

[4] CHATTERS A W and HAJARNAVIS C R. *Rings with chain conditions* [M]. Research notes in mathematics 44, Pitman, 1980.

The Decomposition of Arbitrary Additive Rank Functions in Noetherian Rings

LI Jin-song

(Inst. of Math., Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: Using Localization we determine the same form of all additive rank functions in noetherian rings as [1] by decomposition of any additive rank function in artinian rings. The atomic rank functions are characterized in the same module category and a new conclusion is achieved.

Key words: Noetherian rings; additive rank functions; decomposition.