第19卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 19 No. 4
1999年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 1999

广义对角占优矩阵和M矩阵的判定*

郭晞娟[1]，　高益明[2]

(1. 燕山大学，秦皇岛 066004；　2. 东北师范大学，长春 130024)

摘　要：本文进一步给出了广义对角占优矩阵和 M 矩阵新的判定准则，从而也得到了非奇矩阵的若干判定准则.

关键词：广义对角占优矩阵；M 矩阵；判定准则.
分类号：AMS(1991) 15A/CLC O151.21
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0733-05

1　引　言

广义对角占优矩阵和 M 矩阵是计算数学中应用极其广泛的矩阵类，在控制理论中也有相当广泛的应用. 文[1]中证明了若 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为不可约矩阵，$J=\{i\,|\,|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|=\Lambda_i\}\neq\varnothing$，$N_1=J$，$N_2=N-J$，如果 $N_1\cup N_2=N$，且 $(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)\geqslant\beta_i\alpha_j$（其中 $i\in N_1$，$j\in N_2$，$\alpha_i=\sum\limits_{\substack{j\in N_1\\ j\neq i}}|a_{ij}|$，$\beta_i=\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|$），至少有一严格不等式成立，则 A 为广义对角占优矩阵. 本文在[1]基础上更进一步给出了广义对角占优矩阵新的判定准则，使得文[1]的结果成为本文的推论.

2　主要结果

为讨论问题方便引入如下记号：设 $\alpha_i,\beta_i,A,N,N_1,N_2$ 如引言所述，设 $\beta_i=\beta_{i_1}+\beta_{i_2}$，$N'_2$ 为所有对于 $i\in N_1$ 不等式 $(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)\leqslant\alpha_j\beta_i$ 成立的 j 集合（$\beta_{i_1}=\sum\limits_{\substack{j\in N'_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|$）. $j\in N'_2$ 且满足

$$\frac{\beta_{j_2}+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_1}}=\max_{i\in N'_2}\frac{\beta_{i_2}+\alpha_i d}{|a_{ii}|-\beta_{i_1}},$$

的所有 j 集合记作 $N_i^*\subseteq N'_2$.

---

* **收稿日期**：1996-03-04

作者简介：郭晞娟(1959-)，女，吉林省舒兰县人，博士，燕山大学副教授.

$$M(A)=(m_{ij})_{n\times n},m_{ij}=|a_{ij}|(i=j),m_{ij}=-|a_{ij}|(i\neq j),j,i=1,2,\cdots,n.$$

引理 1 若存在正对角矩阵 D,使 AD 为广义对角占优矩阵,则 A 必为广义对角占优矩阵.

定理 1 如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$满足如下三个条件:

1). $(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)\geqslant\alpha_j\beta_i,j\in N_2-N'_2,i\in N_1$,或者 $j\in N'_2,i\in N_1-N'_1$;

2). 存在 $\min\limits_{j\in N_2-N'_2}\dfrac{|a_{jj}|-\beta_j}{\alpha_j}\geqslant d\geqslant\max\limits_{i\in N_1}\dfrac{\beta_i}{|a_{ii}|-\alpha_i}$,使得对于 $\delta=\max\limits_{i\in N'_2}\dfrac{\alpha_i d+\beta_{i_2}}{|a_{ii}|-\beta_{i_1}}$有

$$\beta_{i_1}\delta+\beta_{i_2}+\alpha d\leqslant|a_{ii}|d,\quad i\in N_1,\tag{2.1}$$

$$\beta_{i_1}\delta+\beta_{i_2}+\alpha d\leqslant|a_{ii}|,\quad i\in N_2-N'_2,\tag{2.2}$$

至少有一严格不等式成立;

3). 对式(2.1),(2.2)等号成立的 i 和 $i\in N''_2$ 存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}$,使对于 j_k 式(2.1),(2.2)有严格不等式成立,若 $N'_2-N''_2\neq\varnothing$,则 $j_k\in N'_2-N''_2$ 也可,

则 A 为广义对角占优矩阵,$M(A)$为 M 矩阵.

证明 作 $D_1=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=d,i\in N_1;d_i=1,i\in N_2\}$,则得 $B_1=AD_1=(a_{ij}^{(1)})$.

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=(|a_{ii}|-\alpha_i)d-\beta_i\geqslant 0,\quad i\in N_1;$$

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i d\geqslant 0,\quad i\in N_2-N'_2;$$

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i d\leqslant 0,\quad i\in N'_2.$$

作 $D_2=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=\delta,i\in N'_2;d_i=1,i\in N_1\cup(N_2-N'_2)\}$,则得

$$B_2=B_1D_2=(a_{ij}^{(2)}).$$

当 $i\in N_1$ 时,由条件 2 知$|a_{ii}^{(2)}|\geqslant\Lambda_i^{(2)}$;

$$|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}=|a_{ii}|-\alpha_i d-\beta_{i_1}\delta-\beta_{i_2}\geqslant 0,\quad i\in N_2-N'_2;$$

$$|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}=|a_{ii}|-\beta_{i_1})\delta-\beta_{i_2}-\alpha_i d\geqslant(|a_{ii}|-\beta_{i_1})\frac{\alpha_i d+\beta_{i_2}}{|a_{ii}|-\beta_{i_1}}-(\beta_{i_2}+\alpha_i d)=0,\quad i\in N'_2.$$

以上各式至少有一严格不等式成立.则由条件 3 及文献[5]中定理知,B_2 为广义对角占优矩阵,由引理知 A 为广义对角占优矩阵,所以 $M(A)$为非奇异 M 矩阵. □

定理 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$,如果满足如下三个条件:

1). 对任意 $i\in N_1,j\in N_2-N'_2$,有$(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)\geqslant\alpha_j\beta_i$ 成立;

2). 存在$\max\limits_{j\in N_1}\dfrac{\beta_j}{|a_{jj}|-\alpha_j}\leqslant d\leqslant\min\limits_{j\in N_2-N'_2}\dfrac{|a_{ii}|-\beta_i}{\alpha_i}$,使得

$$\max_{j\in N'_2}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_1}}\beta_{j_1}+\beta_{j_2}+\alpha_j d\leqslant|a_{jj}|,j\in N_2-N'_2,\tag{2.3}$$

$$\max_{j\in N'_2}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_1}}\beta_{j_1}+\beta_{j_2}+\alpha_j d\leqslant|a_{jj}|,j\in N_1,\tag{2.4}$$

且在(2.3)和(2.4)式中至少有一个严格不等式成立;

3). 对式(2.3),(2.4)等号成立的 j 和 $j\in N''_2$,存在非零元素链 $a_{jj_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}$,使对于 j_k,式(2.3),(2.4)有严格不等式成立,若 $N'_2-N''_2\neq\varnothing$,则 $j_k\in N'_2-N''_2$ 也可,

则 A 必为广义对角占优矩阵,$M(A)$为非奇 M 矩阵.

证明 作 $D_1=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=d,i\in N_1;d_i=1,i\in N_2\}$，则得 $B_1=AD_1=(a_{ij}^{(1)})$.

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=(|a_{ii}|-\alpha_i)d-\beta_i\geqslant 0,\quad i\in N_1;$$

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i d\geqslant 0,\quad i\in N_2-N_2';$$

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i d\leqslant 0,\quad i\in N_2',$$

作 $D_2=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=\max\limits_{j\in N_2'}\dfrac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|},i\in N_2';d_i=1,i\in(N_2-N_2')\cup N_1\}$，则得

$$B_2=B_1D_2=(a_{ij}^{(2)}).$$

$$|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}=(|a_{ii}|-\alpha_i)d-\beta_{i_1}\max_{j\in N_2'}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|+\beta_{j_1}}-\beta_{i_2}\geqslant 0\ (\text{由}(2.4)\text{式}),\quad i\in N_1;$$

$$|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}=|a_{ii}|-\alpha_i d-\beta_{i_1}\max_{j\in N_2'}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_1}}-\beta_{i_2}\geqslant 0\ (\text{由}(2.3)\text{式}),\quad i\in N_2-N_2';$$

$$\begin{aligned}|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}&=\max_{j\in N_2'}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|+\beta_{j_1}}(|a_{ii}|-\beta_{i_1})-\alpha_i d-\beta_{i_2}\\&\geqslant\frac{\beta_i+\alpha_i d}{|a_{ii}|-\beta_{i_1}}(|a_{ii}|-\beta_{i_1})-\alpha_i d-\beta_{i_2}=0,\quad i\in N_2'.\end{aligned}$$

若 $N_2-N_2''\neq\varnothing$，则上式当 $i\in N_2'-N_2''$ 时有严格不等式成立. 由条件 3 及文献[5]的定理知，B_2 为广义对角占优矩阵，由引理知 A 为广义对角占优矩阵，$M(A)$ 为 M 矩阵. □

上述定理 1,2，如果 $N_2'-N_2''\neq\varnothing$，则式(2.1),(2.2),(2.3),(2.4)无须要求严格不等号，只要有非零元素链即可.

推论 1 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是一个不可约矩阵，$N_1\neq\varnothing$，如果存在 $N_1\cup N_2=N$，使得对任意 $i\in N_1,j\in N_2,(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)\geqslant\alpha_j\beta_i$，至少有一严格不等式成立，则 A 是广义对角占优矩阵，$M(A)$是 M 矩阵.

推论 2 设 $A=B^H$，若 A 满足定理 1—2 的条件之一，则 B 为广义对角占优矩阵，$M(B)$为 M 矩阵.

推论 3 若有正对角阵 D,E，使得 $B=EAD$ 满足定理 1—2 及推论 1—2 条件之一，则 A 为广义对角占优矩阵，$M(A)$为 M 矩阵.

推论 4 若存在非奇异矩阵 P,Q，使得 $B=PAQ$ 对角元为正(负)，且 $C=\frac{1}{2}(B+B^H)$满足定理 1—2 及推论 1—2 条件之一，则 $\det A\neq 0$.

推论 5 若 A 对角元为正(负)，且 $B=\frac{1}{2}(A+A^H)$，满足定理 1—2 及推论 1—2 条件之一，则 $\det A\neq 0$.

推论 6 若 A 满足定理 1—2 及推论 1—2 条件之一，且 a_{ii}为实数，则 A 的特征值实部为正负的个数与 a_{jj}中正负数的个数相同.

证明 由本文定理 1 及推论 1—2 知，A 为广义对角占优矩阵. 由文献[7]定理 1 知，A 的特征值实部为正负的个数与 a_{jj}中正负数的个数相同. □

定理 3 如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$满足如下两个条件：

1). $N_2'\neq\varnothing$;

2). 存在$\max\limits_{j\in N_2'}\dfrac{|a_{jj}|-\beta_j}{\alpha_j}\leqslant d\leqslant\min\limits_{j\in N_1}\dfrac{\beta_j}{|a_{jj}|-\alpha_j}$，使得

$$\min_{j\in N_2-N'_2}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_2}}\beta_{j_2}+\beta_{j_1}+\alpha_j d\geqslant|a_{jj}|d\ ,j\in N_1,$$

$$\min_{j\in N_2-N'_2}\frac{\beta_j+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_2}}\beta_{j_2}+\beta_{j_1}+\alpha_j d\geqslant|a_{jj}|\ ,j\in N'_2,$$

则 A 为非广义对角占优矩阵，$M(A)$ 为非 M 矩阵.

证明 作 $D=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=d$，当 $i\in N_1$ 时；$d_i=1$，当 $i\in N_2$ 时$\}$，则得 $B_1=AD_1=(a_{ij}^{(1)})$.

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=(|a_{ii}|-\alpha_i)d-\beta_i\leqslant(|a_{ii}|-\alpha_i)\frac{\beta_i}{|a_{ii}|-\alpha_i}-\beta_i=0,\quad i\in N_1;$$

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i d\geqslant 0,\quad i\in N_2-N'_2;$$

$$|a_{ii}^{(1)}|-\Lambda_i^{(1)}=|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i d\leqslant|a_{ii}|-\beta_i-\alpha_i\frac{|a_{ii}|-\beta_i}{\alpha_i}=0,\quad i\in N'_2.$$

作 $D_2=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=\min\limits_{j\in N_2-N'_2}\dfrac{\beta_{j_1}+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_1}}$，当 $i\in N_2-N'_2$ 时；$d_i=1$，当 $i\in N'_2\cup N_1\}$，则得

$$B_2=B_1D=(a_{ij}^{(2)}).$$

$$|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}=(|a_{ii}|-\alpha_i)d-\beta_{i_2}\min_{j\in N_2-N'_2}\frac{\beta_{j_1}+\alpha_j d}{|a_{jj}|-B_{j_2}}-\beta_{i_1}\leqslant 0,\quad j\in N_1;$$

$$\begin{aligned}|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}&=(|a_{ii}|-\beta_{i_2})\min_{j\in N_2-N'_2}\frac{\beta_{j_1}+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_2}}-\beta_{i_1}-\alpha_i d\\&\leqslant(|a_{ii}|-\beta_{i_2})\frac{\beta_{i_1}+\alpha_i d}{|a_{ii}|-\beta_{i_2}}-\alpha_i d-\beta_{i_1}=0,\quad i\in N_2-N'_2;\end{aligned}$$

$$|a_{ii}^{(2)}|-\Lambda_i^{(2)}=|a_{ii}|-\alpha_i d-\beta_{i_1}-\beta_{i_2}\min_{j\in N_2-N'_2}\frac{\beta_{j_1}+\alpha_j d}{|a_{jj}|-\beta_{j_2}}\leqslant 0,\quad i\in N'_2.$$

由文献[4]定理 1 知，B_2 不存在占优行，故 B_2 非连优阵，又由该文定理 3 知，B_2 非广义对角占优矩阵. 所以 A 非广义对角占优矩阵，而 $M(A)$ 为非 M 矩阵.

3 算 例

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0.45&0&0.4\\0.25&1&0.25&0.6\\0&0.4&1&0.4\\0&0&1.01&1\end{bmatrix},$$

则当 $i=1,j=2,\alpha_j=0.5,\beta_j=0,\alpha_i=0.6,\beta_i=0.85,(N_1=\{1,3\},N_2=\{2,4\})$，故 $(|a_{ii}|-\alpha_i)(|a_{jj}|-\beta_j)=(1-0.6)(1-0)=0.4$.

$\beta_i\alpha_j=0.85\times0.5=0.425>0.4$，不满足文献[1]－[6]的条件，容易证明，满足本文定理 2.

作 $D=\mathrm{diag}\{0.98,1.09,0.98,1\}$，则

$$B=AD=\begin{bmatrix}0.98&0.4905&0&0.4\\0.245&1.09&0.245&0.6\\0&0.4469&0.98&0.4\\0&0&0.9898&1\end{bmatrix}$$

为广义对角占优矩阵，故 A 为广义对角占优矩阵.

参考文献：

[1] GAO Yi-ming, WANG Xiao-hui. *Criteria for generalized diagornlly dominant matrices and M-matrices* [J]. Linear Algebra and Appl., 1992, **169**: 257—268.

[2] 高益明，郭晞娟. 广义对角占优矩阵的判定及应用 [C]. 全国计算数学开津会议论文集，1991.

[3] 高益明. 广义对角占优矩阵和 M 矩阵的判定准则 [J]. 高等学校计算数学学报，1992，**3**：233—239.

[4] 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇的判定(Ⅱ) [J]. 工程数学学报，1988，**3**：13—17.

[5] 高益明. 广义对角占优矩阵和非奇的判定 [J]. 东北师范大学自然科学学报，1982，**3**：25—28.

[6] BERMAN A and PLEMMONS R J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences* [M]. Academin, New York, 1979.

[7] 郭晞娟. 广义对角占优矩阵和共轭广义对角占优矩阵的特征值分布 [J]. 东北重型机械学院学报，1991，**4**：362—365.

Griteria for Generalized Diagonally Dominant Matrices and *M*-Matrices

GUO Xi-juan[1], GAO Yi-ming[2]

(1. Yanshan University, Qinhuangdao 066004;

2. Northeast Normal University, Changchun 130024)

Abstract: In this paper, we provide some new necessary and sufficient conditions for identifying generalized dominant matrices (GDDM) and also obtain some criteria forjudging M-matricesand nonsigular matrices.

Key words: generalized diagonally dominant matrix; M-matrix.