第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

一类系数依赖于两个参数的齐次递推式之解*

余 长 安
(武汉大学数学系，430072)

摘 要：本文拓广了文献[1]的研究范围，给出了一类依赖于两个参数的变系数递推式的解的明显表达式．有关结果，使得象 Lah 数，两类 Stirling 数以及置换群中的置换个数等多方面的相应定解问题，皆可以直接解出．这对具大数值双指标的递推式的计算，亦或在其理论的研究方面，都有其作用．

关键词：两个参数；变系数；齐次递推式；明显解公式．
分类号：AMS(1991) 05A10/CLC O157.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)04-0741-06

文献[1]讨论了单参数的常系数齐次递推式解的结构．本文研究了两个参数的变系数齐次递推式解的表达式．其结果不仅具有一定的理论意义，而且为求解组合计数中系数取值随参数而变化的一些相应定解问题，提供了一个统一的计算公式．

1 文中符号意义

下文中，记号 $N_m=n_1+n_2+\cdots+n_m(m\geqslant 1)$，其中 $n_k(k=1,2,\cdots,m)$ 皆为非负整数，约定当 $m=0$ 时，$n_m=N_m=0$，求和号

$$\sum_{N_m\leqslant x}1=\sum_{n_1=0}^{x}\sum_{n_2=0}^{x-n_1}\cdots\sum_{n_m=0}^{x-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}1\ (x\geqslant 0).$$

设定：当 $x<0$ 时，$\sum\limits_{N_m\leqslant x}=0(m\geqslant 1)$；当 $m=0$ 且 $x\geqslant 0$ 时，$\sum\limits_{N_m\leqslant x}=1$．连乘号

$$\prod_{k=1}^{m}a_k=a_1a_2\cdots a_m\ (m\geqslant 1).$$

规定当 $m=0$ 时，$\prod\limits_{k=1}^{m}a_k=1$．

为了书写简洁，本文引入如下记号：

* 收稿日期：1995-06-21
基金项目：国家自然科学基金资助课题(19771063)
作者简介：余长安(1948-)，男，湖北鄂州市人，武汉大学副教授．

$$F(i,j;m,x,y)=\begin{cases}\sum\limits_{N_m\leqslant x}\{\{\prod\limits_{k=1}^{m}\{\prod\limits_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1},j-k+1)\}\}\times\\ \quad\{\prod\limits_{\lambda_{m+1}=1}^{x-N_m}f(i-p(\lambda_{m+1}-1)-q(j-y)-pN_m,y)\}\times\\ \quad\{\prod\limits_{t=1}^{m}g(i-q(t-1)-pN_t,j-t+1)\}\},\ x\geqslant 0,\\ 0,\ x<0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 i,j,q,m 及 y 皆可为非负整数,p 为正整数.

为讨论方便计,再写出(1)式的一些特款:

$$F(i,j;0,x,y)=\prod_{\lambda_1=1}^{x}f(i-p(\lambda_1-1)-q(j-y),y),\tag*{(1)$_1$}$$

$$F(i,j;m,0,y)=\prod_{t=1}^{m}g(i-q(t-1),j-t+1),\tag*{(1)$_2$}$$

$$F(i,j;0,0,y)=1.\tag*{(1)$_3$}$$

2 主要结果及其推导过程

定理 两个参数的变系数齐次递推式

$$\text{(A)}\quad\begin{cases}u_{i,j}=f(i,j)u_{i-p,j}+g(i,j)u_{i-q,j-1}, & (2)\\ u_{s,1}=c_s(s=1,2,\cdots,p),u_{i,j}=0(i<1\text{ 或 }j<1\text{ 或 }i\leqslant q(j-1),j\geqslant 2) & (3)\end{cases}$$

(其中 i,j,q 为非负整数,p 为正整数;$f(i,j)$ 与 $g(i,j)$ 皆为随 $i,j(i,j=1,2,\cdots)$ 的变化而取定的任意常数;$c_s(s=1,2,\cdots,p)$ 亦皆为任意常数)的一般解公式为

$$\begin{aligned}u_{i,j}=&\sum_{N_{j-1}\leqslant\theta_1}\{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1},j-k+1)\}\}\times\\ &\{\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-N_{j-1}}f(i-p(\lambda_j-1)-q(j-1)-pN_{j-1},1)\}\times\\ &\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-q(t-1)-pN_t,j-t+1)\}\}C_{(i-q(j-1)-p\theta_1)}\\ =&\{F(i,j;j-1,\theta_1,1)\}C_{(i-q(j-1)-p\theta_1)}(i,j\geqslant 1),\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\theta_1=[\dfrac{i-1-q(j-1)}{p}]$.

证明 用数学归纳法证之($q\geqslant 0,p\geqslant 1$).假设

$$u_{i',j}=\{F(i',j;j-1,[\frac{i'-1-q(j-1)}{p}],1)\}C_{(i'-q(j-1)-p[\frac{i'-1-q(j-1)}{p}])}\quad(i'<i),\tag{5}$$

$$u_{i,j'}=\{F(i,j';j'-1,[\frac{i-1-q(j'-1)}{p}],1)\}C_{(i-q(j'-1)-p[\frac{i-1-q(j'-1)}{p}])}\quad(j'<j),\tag{6}$$

若推出

$$u_{i,j}=\{F(i,j;j-1,[\frac{i-1-q(j-1)}{p}],1)\}C_{(i-q(j-1)-p[\frac{i-1-q(j-1)}{p}])}\quad(i,j\geqslant 1),\tag{7}$$

需要归纳基础：

$$u_{1,j}=\{F(1,j;j-1,[\frac{1-1-q(j-1)}{p}],1)\}C_{(1-q(j-1)-p[\frac{1-1-q(j-1)}{p}])}\quad (j\geqslant 1),\tag{8}$$

$$u_{i,1}=\{F(i,j;1-1,[\frac{i-1-q(1-1)}{p}],1)\}C_{(i-q(1-1)-p[\frac{i-1-q(1-1)}{p}])}\quad (i\geqslant 1).\tag{9}$$

在(8)式中，当 $j=1$ 时，无论 p,q 取上述界限内的何值，总有

$$u_{1,1}=\{F(1,1;0,0,1)\}c_1=c_1,$$

此处利用了$(1)_3$ 式：$F(i,j;0,0,y)=1$. 注意到初始条件(3)，易知它是正确的.

当 $j\geqslant 2$ 时，若 $q=0$，则不论 p 取何正整数，(8)式恒为

$$u_{1,j}=\{F(1,j;j-1,0,1)\}c_1=\{\prod_{t=1}^{j-1}g(1,j-t+1)\}c_1,\tag{10}$$

这里利用了式$(1)_2$. 而此时，问题(A)变为

$$(\mathrm{A}')\qquad \begin{cases}u_{1,j}=g(1,j)u_{1,j-1},\\ u_{1,1}=c_1.\end{cases}$$

显然，(A′)实际上是只含有一个指标的定解问题. 易验证(10)式为问题(A′)之解.

若 $q>0$，则(8)式为

$$u_{1,j}=0,\tag{11}$$

这是因为 $q>0$ 时，在 $j\geqslant 2$ 的条件下，$[\frac{-q(j-1)}{p}]<0$. 联系到问题(A)中的初始条件，立知(11)式亦是正确的.

综上所述，对上述界定的 j 及 p,q，(8)式都满足问题(A).

在(9)式中，当 $i\geqslant 2$ 时，对于 $p\geqslant 1$ 及 $q\geqslant 0$，有

$$u_{i,1}=\{F(i,1;0,[\frac{i-1}{p}],1)\}C_{(i-p[\frac{i-1}{p}])}\quad (i\geqslant 2).$$

利用$(1)_1$ 式，上式可变为

$$u_{i,1}=\{\sum_{\lambda_1=1}^{[\frac{i-1}{p}]}f(i-p(\lambda_1-1),1)\}C_{(i-p[\frac{i-1}{p}])}.\tag{12}$$

而在此情形，问题(A)应为

$$(\mathrm{A}'')\qquad \begin{cases}u_{i,1}=f(i,1)u_{i-p,1},\\ u_{s,1}=c_s(s=1,2,\cdots,p),u_{i,1}=0(i<1).\end{cases}$$

事实上，(A″)也是只含有一个参数的递推式，亦不难验证(12)式为问题(A″)之解. 这就表明(9)式满足问题(A). 至此，完全验证了归纳基础的正确性.

下面利用归纳假设(5)与(6)，进行归纳推理. 由递推式(2)，有

$$\begin{aligned}u_{i,j}&=f(i,j)u_{i-p,j}+g(i,j)u_{i-q,j-1}\\&=f(i,j)\{F(i-p,j;j-1,[\frac{i-1-p-q(j-1)}{p}],1)\}C_{(i-p-q(j-1)-p[\frac{i-1-p-q(j-1)}{p}])}+\\&\quad g(i,j)\{F(i-q,j-1;j-2,[\frac{i-1-q-q(j-2)}{p}],1)\}C_{(i-q-q(j-2)-p[\frac{i-q-1-q(j-2)}{p}])}\\&=\{f(i,j)F(i-p,j;j-1,\theta_1-1,1)+g(i,j)F(i-q,j-1;j-2,\theta_1,1)\}C_{(i-q(j-1)-p\theta_1)}\\&\qquad (i,j\geqslant 1,\theta_1=[\frac{i-1-q(j-1)}{p}]).\end{aligned}$$

由(13)式可知，要证明(7)式成立，只须证得

$$f(i,j)F(i-p,j;j-1,\theta_1-1,1)+g(i,j)F(i-q,j-1;j-2,\theta_1,1)$$
$$=F(i,j;j-1,\theta_1,1)\quad(i,j\geqslant 1). \tag{14}$$

利用展开式(1)(为书写简便，暂记(14)式左边的表达式为△)，有

$$\begin{aligned}\triangle=&f(i,j)\sum_{N_{j-1}\leqslant\theta_1-1}\{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1},j-k+1)\}\}\times\\&\{\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-1-N_{j-1}}f(i-p-p(\lambda_j-1)-q(j-1)-pN_{j-1},1)\}\times\\&\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-p-q(t-1)-pN_t,j-t+1)\}\}+\\&g(i,j)\sum_{N_{j-2}\leqslant\theta_1}\{\{\prod_{k=1}^{j-2}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-q-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1},j-k+1-1)\}\}\times\\&\{\prod_{\lambda_{j-1}=1}^{\theta_1-N_{j-2}}f(i-q-p(\lambda_{j-1}-1)-q(j-2)-pN_{j-2},1)\}\times\\&\{\prod_{t=1}^{j-2}g(i-q-q(t-1)-pN_t,j-t+1-1)\}\}\quad(i,j\geqslant 1)\end{aligned}\tag{15}$$

在上式中，将和式 $\sum\limits_{N_m\leqslant x}$ 展开，并将 $f(i,j)$ 及 $g(i,j)$ 乘入相应因式内，则有

$$\begin{aligned}\triangle=&\sum_{n_1=0}^{\theta_1-1}\sum_{n_2=0}^{\theta_1-1-n_1}\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{\theta_1-1-N_{j-2}}\{\{\{\prod_{\lambda_1=1}^{n_1+1}f(i-p(\lambda_1-1),j)\}\{\prod_{k=2}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p\lambda_k-q(k-1)-\\&pN_{k-1},j-k+1)\}\}\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-1-N_{j-1}}f(i-p\lambda_j-q(j-1)-pN_{j-1},1)\}\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-p-q(t-1)-\\&pN_t,j-t+1)\}\}+\sum_{n_1=0}^{\theta_1}\sum_{n_2=0}^{\theta_1-n_1}\cdots\sum_{n_{j-2}=0}^{\theta_1-N_{j-3}}\{\{\prod_{k=1}^{j-2}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p(\lambda_k-1)-qk-pN_{k-1},j-k)\}\}\\&\{\prod_{\lambda_{j-1}=1}^{\theta_1-N_{j-2}}f(i-p(\lambda_{j-1}-1)-q(j-1)-pN_{j-2},1)\}\{\prod_{t=0}^{j-2}g(i-qt-pN_t,j-t)\}\}\ (i,j\geqslant 1).\end{aligned}\tag{16}$$

利用关系式$\sum\limits_{n_1=0}^{\theta_1-1}1=\sum\limits_{n_1=1}^{\theta_1}1$，并作适当变换，则(16)式又可化为

$$\begin{aligned}\triangle=&\sum_{n_1=1}^{\theta_1}\sum_{n_2=0}^{\theta_1-n_1}\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{\theta_1-N_{j-2}}\{\{\{\prod_{\lambda_1=1}^{n_1}f(i-p(\lambda_1-1),j)\}\{\prod_{k=2}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p\lambda_k-q(k-1)-pN_{k-1}-\\&1,j-k+1)\}\}\}\{\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-1-N_{j-1}-1}f(i-p\lambda_j-q(j-1)-p(N_{j-1}-1),1)\}\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-p-q(t-1)-\\&p(N_t-1),j-t+1)\}\}+\sum_{n_1=0}^{0}\sum_{n_2=0}^{\theta_1-n_1}\sum_{n_3=0}^{\theta_1-n_1-n_2}\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{\theta_1-N_{j-2}}\{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p(\lambda_k-1)-q(j-1)-pN_{j-1},\\&j-k+1)\}\{\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-N_{j-1}}f(i-p(\lambda_j-1)-q(j-1)-pN_{j-1},1)\}\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-q(t-1)-pN_t,j-t+\\&1)\}\}\quad(i,j\geqslant 1).\end{aligned}\tag{17}$$

再对(17)式进行整理,合并,可得

$$\triangle=\sum_{n_1=1}^{\theta_1}\sum_{n_2=0}^{\theta_1-n_1}\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{\theta_1-N_{j-2}}\{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1},j-k+1)\}\}\{\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-N_{j-1}}f(i-p(\lambda_j-1)-q(j-1)-pN_{j-1},1)\}\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-q(t-1)-pN_t,j-t+1)\}\}$$

$$+\sum_{n_1=0}^{0}\sum_{n_2=0}^{\theta_1-n_1}\sum_{n_3=0}^{\theta_1-n_1-n_2}\cdots\sum_{n_{j-1}=0}^{\theta_1-N_{j-2}}\{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f(i-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1},j-k+1)\}\}\{\prod_{\lambda_j=1}^{\theta_1-N_{j-1}}f(i-p(\lambda_j-1)-q(j-1)-pN_{j-1},1)\}\{\prod_{t=1}^{j-1}g(i-q(t-1)-pN_t,j-t+1)\}\}\quad(i,j\geqslant 1).\tag{18}$$

利用关系式 $\sum_{n_1=0}^{0}1+\sum_{n_1=1}^{\theta_1}1=\sum_{n_1=0}^{\theta_1}1$,将(18)式中的两和式合并,并注意到(1)的展开形式,立知式(18)即为 $F(i,j;j-1,\theta_1,1)$.(7)式得证.

于是,由数学归纳法原理,知定理的结论为真. □

3 推论及例子

若递推式(2)中的系数 $f(i,j)$ 及 $g(i,j)$ 皆为 i 与 j 的函数的乘积形式,则由定理可得

推论 变系数递推式

$$(\mathrm{A}''')\ \begin{cases}u_{i,j}=f_1(i)f_2(j)u_{i-p,j}+g_1(i)g_2(j)u_{i-q,j-1}, & (19)\\ u_{s,1}=c_s(s=1,2,\cdots,p),u_{i,j}=0(i<1\text{ 或 }j<1\text{ 或 }i\leqslant q(j-1),j\geqslant 2) & (20)\end{cases}$$

解的结构为

$$u_{i,j}=\{F_1(i,j;j-1,\theta_1,1)\}C_{(i-q(j-1)-p\theta_1)}\quad(i,j\geqslant 1),\tag{21}$$

式中

$$F_1(i,j;m,x,y)=\begin{cases}\sum_{N_m\leqslant x}\{\{\prod_{k=1}^{m}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}f_1(i-p(\lambda_k-1)-q(k-1)-pN_{k-1})f_2(j-k+1)\}\}\times\\ \{\prod_{\lambda_{m+1}=1}^{x-N_m}f_1(i-p(\lambda_{m+1}-1)-q(j-1)-pN_m)f_2(1)\}\times\\ \{\prod_{t=1}^{m}g_1(i-q(t-1)-pN_t)g_2(j-t+1)\}\},\ (x\geqslant 0),\\ 0\quad(x<0).\end{cases}\tag{22}$$

证明 注意到问题(A‴)与问题(A)的差别,仅是问题(A)中的递推式(2)内的系数,今变为了如下分离形式:

$$f(i,j)=f_1(i)\cdot f_2(j),\ g(i,j)=g_1(i)\cdot g_2(j),\tag{23}$$

故只要将问题(A)的解公式(4)中的相应形式分离,便立即可以得到问题(A‴)中的解公式(21).推论得证.

例 关于第二类 Stirling 数的定解问题

$$(\mathrm{B})\quad\begin{cases}u_{i,j}=ju_{i-1,j}+u_{i-1,j-1},\\ u_{1,1}=1,u_{i,j}=0\ (i<1\text{ 或 }j<1\text{ 或 }i<j-1)\end{cases}$$

之解的表达式为

$$u_{i,j}=\sum_{N_{j-1}\leqslant i-j}\{j^{n_1}\cdot(j-1)^{n_2}\cdot\cdots\cdot 3^{n_{j-2}}\cdot 2^{n_{j-1}}\}\quad(i,j\geqslant 1).\tag{24}$$

证明 问题(B)为问题(A‴)中 $p=q=1, c_1=1, f_1(i)=1, f_2(j)=j, g_1(i)=g_2(j)=1(i,j\geqslant 1)$的特别情形,故将上述各值代入问题(A‴)的解公式(21)中,即得

$$\begin{aligned}u_{i,j}&=\sum_{N_{j-1}\leqslant i-1-(j-1)}\{\{\prod_{k=1}^{j-1}\{\prod_{\lambda_k=1}^{n_k}1\cdot(j-k+1)\}\}\{\prod_{\lambda_j=1}^{i-1-(j-1)-N_{j-1}}1\}\{\prod_{t=1}^{j-1}1\}\}\\&=\sum_{N_{j-1}\leqslant i-j}\{\prod_{k=1}^{j-1}(j-k+1)^{n_k}\}\\&=\sum_{N_{j-1}\leqslant i-j}\{j^{n_1}\cdot(j-1)^{n_2}\cdot\cdots\cdot 3^{n_{j-2}}\cdot 2^{n_{j-1}}\}\quad(i,j\geqslant 1).\end{aligned}\tag{25}$$

参考文献:

[1] 屠规彰. 三项齐次递推式的一般解公式 [J]. 数学年刊, 1981, **2**(4): 431—436.

[2] 余长安. p 阶循环(递推)方程式的解公式 [J]. 数学学报, 1986, **29**(3): 313—316.

[3] 柯召,魏万迪. 组合论(上册) [M]. 北京:科学出版社, 1981, 64—73.

[4] COMTET L. *Advanced Combinatorics* [M]. Dordrecht, Reidel, 1974.

[5] 余长安. 一类非齐次变系数递归关系的解的结构 [J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1992, **1**: 117—119.

[6] MICHELLE Wachs and DENNIS White. *p,q-Stirling numbers and set partition statistics* [J]. J. Combin, Theory, 1991, **56**(1): 27—47.

A Formula of Solution for a Class of Homogeneous Recurrence with Two Parameters

YU Chang-an

(Dept. of Math., Wuhan Univ., 430072)

Abstract: In this paper we consider a class of homogeneous recurrence with two parameters

$$\begin{cases}u_{i,j}=f(i,j)u_{i-p,j}+g(i,j)u_{i-q,j-1},\\u_{s,1}=c_s(s=1,2,\cdots,p),u_{i,j}=0(i<1\text{ or }j<1\text{ or }i\leqslant q(j-1)),\end{cases}$$

where i,j and q are nonnegative integers; p is positive integer; $f(i,j)$ and $g(i,j)$ are variable numbers; $c_s(s=1,2,\cdots,p)$ are arbitrary constants. Its general solution is given by the following formula

$$u_{i,j}=\{F(i,j;j-1,\theta_1,1)\}C_{(i-q(j-1)-p\theta_1)},$$

where $i,j\geqslant 1$, $\theta_1=[(i-1-q(j-1))/p]$.

Key words: two parameters; variable coefficients; homogeneous recurrence; an explicit formula of solution.