第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

三角形上Bernstein多项式的导数逼近*

徐淳宁
(长春邮电学院，吉林 130025)

摘　要:本文研究了三角域上的非乘积型Bernstein多项式的导数逼近函数时的收敛阶估计及其迭代极限.

关键词:Bernstein多项式；导数；逼近；收敛阶；迭代极限.
分类号:AMS(1991) 41A25,41A36/CLC O174.41
文献标识码:A　　**文章编号**:1000-341X(1999)04-0771-07

1 前　言

记T为平面三角形区域,顶点坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$和$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,边界线方程为:$x+\frac{1}{2}=0$,$y+\frac{1}{2}=0$和$x+y-1=0$.设二元函数$f(x,y)$在$T$上有定义,则$f$在$T$上的非乘积型Bernstein多项式为

$$B_n(f,x,y):=\sum_{0\le k+j\le n} f\left(\frac{4k-n}{2n},\frac{4j-n}{2n}\right)P^n_{k,j}(x,y),\tag{1}$$

其中:

$$P^n_{k,j}(x,y):=\binom{n}{k,j}\frac{1}{2^n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^k\left(y+\frac{1}{2}\right)^j(1-x-y)^{n-k-j}\tag{2}$$

$$\binom{n}{k,j}=\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!}.\tag{3}$$

记$\triangle_x^s f(x,y)$为$f(x,y)$在点(x,y)处关于x步长为$2/n$的s阶向前差分,$\triangle_y^r\triangle_x^s f(x,y)$为$f(x,y)$在点$(x,y)$处先对$x$步长为$2/n$的$s$阶向前差分之后再对$y$以同步长$2/n$的$r$阶向前差分

$$\triangle_y^r\triangle_x^s f(x,y):=\sum_{l=0}^{r}\sum_{i=0}^{s}(-1)^{r+s}\binom{r}{l}\binom{s}{i}f\left(x+\frac{2(s-i)}{n},y+\frac{2(r-l)}{n}\right),\tag{4}$$

其中$\binom{r}{l}$为r里取l的组合数,$\binom{s}{i}$为s里取i的组合数,r和s为非负整数.

(4)式也可理解为先对y进行r阶向前差分之后再对x进行s阶向前差分.记$s+r=p$,B_n

---

* 收稿日期:1996-08-30
作者简介:徐淳宁(1956-),男,辽宁盖县人,长春邮电学院教授.

$(f;x,y)$为 $B_n(f)$；$B_n^{(p)}(f)$为$\frac{\partial^{s+r}}{\partial x^s\partial y^r}(B_n(f))$；$f^{(p)}(x,y)$为$\frac{\partial^{s+r}}{\partial x^s\partial y^r}(f(x,y))$；$\triangle^p f(\cdot,\cdot)$为$\triangle_y^r\triangle_x^s f(\cdot,\cdot)$，则经过计算

$$B_n^{(p)}(f)=\frac{n!}{(n-p)!}\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\triangle^p f\left(\frac{4k-n}{2n},\frac{4j-n}{2n}\right)\frac{1}{2^p}P_{k,j}^{n-p}(x,y). \tag{5}$$

文[4]，[5]采用扩展乘数法将 $B_n(f)$改造成在全平面上逼近函数 $f(x,y)$的算子，并研究了收敛性和逼近阶，获得了一系列非常有意义的成果. 文[3]则研究了单纯形上的 Bernstein 多项式的迭代极限和误差阶. 十分感兴趣的是：研究 $B_n^{(p)}(f)$的迭代极限和对函数逼近会有怎样的结果？

2 关于迭代极限

参考文[3]，将 $B_n^{(p)}(f)$的迭代定义为：

$$B_n^{(p)}(f)^{(i)}:=B_n^{(p)}(B_n^{(p)}(f)^{(i-1)}),i=2,3,\cdots, \tag{6}$$

这里 i 表示迭代次数，记

$$\hat{f}(x,y):=\frac{1}{2^p}\frac{n!}{(n-p)!}\triangle^p f\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})(n-p)-n}{2n},\frac{2(y+\frac{1}{2})(n-p)-n}{2n}\right), \tag{7}$$

用$\left[-\frac{1}{2},\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}\right]\hat{f}(\cdot,-\frac{1}{2})$表示 $\hat{f}$ 在$\{-\frac{1}{2},\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}\}$三点关于 x 的二阶偏差商，$\left[-\frac{1}{2},\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}\right]\hat{f}(-\frac{1}{2},\cdot)$表示 $\hat{f}$ 在$\{-\frac{1}{2},\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}\}$三点关于 y 的二阶偏差商，$\left[\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\right]_y\left[\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\right]_x\hat{f}(\cdot,\cdot)$表示 $\hat{f}$ 先在$\{\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\}$二点关于 x 的一阶偏差商之后再在$\{\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\}$二点关于 y 的一阶偏差商. 再记

$$A(x,y):=\frac{n!}{2^{p+1}(n-p)!}\left[(x+\frac{1}{2})\triangle^p f\left(\frac{4(n-p)-n}{2n},-\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.(y+\frac{1}{2})\triangle^p f\left(-\frac{1}{2},\frac{4(n-p)-n}{2n}\right)+(1-x-y)\triangle^p f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right].$$

关于 $B_n^{(p)}(f)$的迭代极限有

定理 1　对于固定的 n，记 $R_i(x,y):=A(x,y)-B_n^{(p)}(f)^{(i)}$，则

$$|R_i(x,y)|\leqslant\left(1-\frac{1}{n-p}\right)^i\left[\alpha_n(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})+\beta_n(y+\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})\right)+$$
$$\left.\gamma_n(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})\right]\searrow 0,(i\to\infty),$$

其中

$$\alpha_n:=\max_{0\leqslant k\leqslant n-p-2}\left|\left[-\frac{1}{2},\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}\right]\hat{f}(\cdot,-\frac{1}{2})\right|,$$

$$\beta_n:=\max_{0\leqslant j\leqslant n-p-2}\left|\left[-\frac{1}{2},\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}\right]\hat{f}(-\frac{1}{2},\cdot)\right|,$$

$$\gamma_n := \max_{0\leqslant k+j\leqslant n-p-2} |[\ ][\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}]_y[\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}]_x\hat{f}(\cdot,\cdot)|.$$

证明 记 $B_{n-p}(f)$ 为 T 上的关于 f 的 n-p 阶 Bernstein 多项式，使用

$$B_{n-p}(1)=1,B_{n-p}(x)=x,B_{n-p}(y)=y, \tag{8}$$

由 $A(x,y)$ 是关于 x,y 的一次多项式有 $B_{n-p}(A)=A(x,y)$，于是有

$$\begin{aligned}
R_1(x,y)&=A(x,y)-B_n^{(p)}(f)=B_{n-p}(A-\hat{f})\\
&=\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\{\frac{k}{n-p}\hat{f}(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})+\frac{j}{n-p}\hat{f}(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})+\\
&\quad(1-\frac{k}{n-p}-\frac{j}{n-p})\hat{f}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})-\hat{f}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)})\}P_{k,j}^{n-p}(x,y)\\
&=\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\{\frac{k}{n-p}\hat{f}(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})-\hat{f}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2})+\\
&\quad(1-\frac{k}{n-p})\hat{f}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}P_{k,j}^{n-p}(x,y)+\\
&\quad\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\{\frac{j}{n-p}\hat{f}(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})-\hat{f}(-\frac{1}{2},\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)})+\\
&\quad(1-\frac{j}{n-p})\hat{f}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}P_{k,j}^{n-p}(x,y)+\\
&\quad\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\{[\hat{f}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2})-\hat{f}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})]-\\
&\quad[\hat{f}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)})-\hat{f}(-\frac{1}{2},\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)})]\}P_{k,j}^{n-p}(x,y)\\
&=\sum_{l=1}^{3}e_l.
\end{aligned}$$

现在分别估计 e_l. 对于 e_1 有

$$\begin{aligned}
e_1&=\sum_{k=0}^{n-p}[\frac{k}{n-p}\hat{f}(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})-\hat{f}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2})+(1-\frac{k}{n-p})\hat{f}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})]P_k^{n-p}(x)\\
&=\sum_{k=1}^{n-p-1}\frac{k(n-p-k)}{(n-p)^2}[\frac{n-p}{k}\hat{f}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})-\frac{(n-p)^2}{k(n-p-k)}\hat{f}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2})+\\
&\quad\frac{n-p}{n-p-k}\hat{f}(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})]P_k^{n-p}(x)\\
&=\sum_{k=1}^{n-p-1}[-\frac{1}{2},\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}]\hat{f}(\cdot,-\frac{1}{2})\frac{4k(n-p-k)}{(n-p)^2}P_k^{n-p}(x)\\
&=\sum_{k=0}^{n-m-2}[-\frac{1}{2},\frac{4(k+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}]\hat{f}(\cdot,-\frac{1}{2})\cdot\\
&\quad(1-\frac{1}{n-p})(x+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-x)P_k^{n-p-2}(x),
\end{aligned}$$

其中 $P_i^j(x)=\frac{1}{2^j}\binom{j}{i}(x+\frac{1}{2})^i(\frac{3}{2}-x)^{j-i},j=n-p$ 或 $j=n-p-2$. 同理可得

$$\begin{aligned}
e_2=&\sum_{j=0}^{n-p-2}[-\frac{1}{2},\frac{4(j+1)-(n-p)}{2(n-p)},\frac{3}{2}]\hat{f}(-\frac{1}{2},\cdot)\cdot\\
&(1-\frac{1}{n-p})(y+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-y)P_j^{n-p-2}(y),
\end{aligned}$$

其中 $P_j^{n-p-2}(y)=\frac{1}{2^{n-p-2}}\binom{n-p-2}{j}(y+\frac{1}{2})^j(\frac{3}{2}-y)^{n-p-2-j}$.

关于 e_3 有：

$$e_3=-\sum_{k=1}^{n-p-1}\sum_{j=1}^{n-p-k}\frac{4kj}{(n-p)^2}\Big[\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\Big]_y\Big[\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\Big]_x\hat{f}(\cdot,\cdot)\cdot P_{k,j}^{n-p}(x,y)$$

$$=-\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p-2}\Big[\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\Big]_y\Big[\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},-\frac{1}{2}\Big]_x\hat{f}(\cdot,\cdot)\cdot(1-\frac{1}{n-p})(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})P_{k,j}^{n-p-2}(x,y),$$

于是

$$R_i(x,y)=B_{n-p}(A-B_{n-p}(\hat{f}))^{(i-1)}=B_{n-p}(e_1+e_2+e_3)^{(i-1)},$$

这里 i 表示迭代次数，对于固定的 n，由于 Bernstein 多项式是线性正算子，使用

$$\begin{cases}B_{n-p}((x+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-x))=(1-\frac{1}{n-p})(x+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-x),\\ B_{n-p}((y+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-y))=(1-\frac{1}{n-p})(y+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-y),\\ B_{n-p}((x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}))=(1-\frac{1}{n-p})(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}),\end{cases}\tag{9}$$

有

$$|R_i(x,y)|\leqslant(1-\frac{1}{n-p})^i\{\alpha_n(x+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-x)+\beta_n(y+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-y)+\gamma_n(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})\}\searrow 0,i\to\infty.$$ □

事实上定理 1 不但给出了迭代误差也给出了迭代极限为 $A(x,y)$. 关于 $B_n(f)$ 的迭代有

推论 对于固定的 n，有

$$\lim_{i\to\infty}B_n(f)^{(i)}=\frac{1}{2}\{(x+\frac{1}{2})f(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})+(y+\frac{1}{2})f(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})+(1-x-y)f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}.$$

利用一元等距差分与导数之间的关系便不难证得下面的结论：

若 $f^{(p)}(x,y)$ 在 T 上连续，则

$$\frac{n!}{2^p(n-p)!}\triangle^p f(x,y)=\frac{n!}{(n-p)!\ n^p}f^{(p)}(x+\frac{2s\theta_1}{n},y+\frac{2r\theta_2}{n}),\tag{10}$$

θ_1 和 θ_2 介于 0 与 1 之间.

由定理 1，使用(10)式和

$$|1-\frac{n!}{(n-p)!\ n^p}|\leqslant\frac{p}{n}\tag{11}$$

有

定理 2 若 $f^{(p)}(x,y)$ 在 T 上连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}B_n^{(p)}(f)^{(i)}=\frac{1}{2}\{(x+\frac{1}{2})f^{(p)}(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})+$$

$$(y+\frac{1}{2})f^{(p)}(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})+(1-x-y)f^{(p)}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}.$$

3　关于收敛速度

现在考虑 $B_n^{(p)}(f)$ 对函数逼近时的收敛阶.先介绍二元函数 $f(x,y)$ 的连续模及其性质.

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2)\overset{\triangle}{=}\max|f(X)-f(Y)|=\max_{\substack{|x_1-x_2|<\delta_1\\|y_1-y_2|<\delta_2}}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|,X,Y\in T$$

则有

$$|f(X)-f(Y)|\leqslant\omega(f;\delta_1,\delta_2)(1+\lambda_1+\lambda_2)\tag{12}$$

其中 $\lambda_1=[|x_1-x_2|/\delta_1]$,$\lambda_2=[|y_1-y_2|/\delta_2]$,这里 $[a]$ 表示 a 的整数部分,在 Euclid 空间中,距离为

$$\|X-Y\|_2=((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)^{1/2}.$$

相应的连续模定义为:$\omega(f,\delta)=\max\limits_{\|X-Y\|_2<\delta}|f(X)-f(Y)|$,且有

$$|f(X)-f(Y)|\leqslant(1+\lambda)\omega(f,\delta),\tag{13}$$

$$\omega(f,n\delta)\leqslant n\omega(f,\delta),n\ \text{为非负整数},\tag{14}$$

其中 $\lambda=[\|X-Y\|_2/\delta]$.

定理 3　设 $f^{(p)}(x,y)$ 在 T 上连续,则

$$|B_n^{(p)}(f)-f^{(p)}|\leqslant 3\omega(f^p,\frac{1}{\sqrt{n-p}},\frac{1}{\sqrt{n-p}})+\frac{p}{n}\|f^{(p)}\|+(1+4p)\omega(f^p,\frac{1}{n},\frac{1}{n}),$$

其中 $\|f^{(p)}\|=\max\limits_{(x,y)\in T}|f^{(p)}(x,y)|$.

证明　由(8)式和(10)式有

$$\begin{aligned}B_n^{(p)}-f^{(p)}=&\frac{n!}{(n-p)!\ n^p}\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\{f^{(p)}(\frac{4(k+S\theta_k)-n}{2n},\frac{4(j+r\theta_j)-n}{2n})-\\&f^{(p)}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)})\}P_{k,j}^{n-p}(x,y)+\\&\frac{n!}{(n-p)!\ n^p}\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p}\{f^{(p)}(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)},\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)})-\\&f^{(p)}(x,y)\}P_{k,j}^{n-p}(x,y)+(\frac{n!}{(n-p)!\ n^p}-1)f^{(p)}(x,y)\\=&g_1+g_2+g_3.\end{aligned}\tag{15}$$

估计 g_1,由于

$$\frac{4k-n}{2n}\leqslant\frac{4(k+s\theta_k)-n}{2n}(\text{或}\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)}\leqslant\frac{4(k+p)-n}{2n}),$$

$$\frac{4j-n}{2n}\leqslant\frac{4(j+r\theta_j)-n}{2n}(\text{或}\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)}\leqslant\frac{4(j+p)-n}{2n}),$$

再使用(8),(11)式有

$$|g_1|\leqslant(1+4p)\omega(f^p,\frac{1}{n},\frac{1}{n}).$$

使用(11)式显然有

$$|g_3| \leqslant \frac{p}{n} \| f^{(p)} \|$$

下面估计 g_2，使用(8)，(11)，(12)式有

$$|g_2| \leqslant \omega(f^p; \delta_1, \delta_2)\{1 + \sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p} ([|\frac{4k-(n-p)}{2n-p} - x|/\delta_1] +$$

$$[|\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)} - y|/\delta_2]) P_{k,j}^{n-p}(x,y)\}$$

$$\leqslant \omega(f^p, \delta_1, \delta_2)\{1 + \sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p} \frac{1}{\delta_1^2}(\frac{4k-(n-p)}{2n-p} - x)^2 P_{k,j}^{n-p}(x,y) +$$

$$\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p} \frac{1}{\delta_2^2}(\frac{4j-(n-p)}{2n-p} - y)^2 P_{k,j}^{n-p}(x,y)\}. \tag{16}$$

使用(8)(9)式和 $(x+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-x) \leqslant 1, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$，有

$$\sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p} \{(\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)})^2 - 2x\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)} + x^2\} P_{k,j}^{n-p}(x,y)$$

$$= \frac{1}{n-p}(x+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-x) \leqslant \frac{1}{n-p}$$

于是取 $\delta_1 = \delta_2 = 1/\sqrt{n-p}$ 有

$$|g_2| \leqslant 3\omega(f^p, \frac{1}{\sqrt{n-p}}, \frac{1}{\sqrt{n-p}}).$$

综合 $g_1 g_2 g_3$，定理 3 得证.

如用欧氏连续模估计，则有

定理 4 设 $f^{(p)}(x,y)$ 在 T 上连续，则

$$|B_n^{(p)}(f) - f^{(p)}| \leqslant 3p\,\omega(f^p, \frac{1}{n}) + \frac{p}{n}\| f^{(p)} \| + 3\omega(f^p, \frac{1}{\sqrt{n-p}}).$$

证明 重新估计(15)式中的 g_1 和 g_2，由(8)、(11)、(13)、(14)式显然有 $|g_1| \leqslant 3p\,\omega(f^p, \frac{1}{n})$，再使用(11)，(13)式有

$$|g_2| \leqslant \omega(f^p, \delta)\{1 + \sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p} [((\frac{4k-(n-p)}{2(n-p)} - x)^2 + (\frac{4j-(n-p)}{2(n-p)} - y)^2)^{1/2}/\delta] \cdot P_{k,j}^{n-p}(x,y)$$

采用(16)式的估计方法，取 $\delta = 1/\sqrt{n-p}$，有 $|g_2| \leqslant 3\omega(f^p, \frac{1}{\sqrt{n-p}})$，这便证明了定理 4.

4 其它结论

现在用扩展乘数法将 $B_n(f)$ 扩为全平面上的逼近算子，令 $\alpha_n \nearrow \infty$；$\alpha_n/n \to 0, n \to \infty$，则

$$B_n(f(\alpha_n t)) = \sum_{0\leqslant k+j\leqslant n} f(\frac{(4k-n)\alpha_n}{2n}, \frac{(4j-n)\alpha_n}{2n}) P_{k,j}^{n}(\frac{x}{\alpha_n}, \frac{y}{\alpha_n}), \tag{17}$$

它的 $p=s+r$ 阶混合偏导为

$$B_n^{(p)}(f(\alpha_n t)) = \frac{n!}{(n-p)!\ (2\alpha_n)^p} \sum_{0\leqslant k+j\leqslant n-p} \triangle^p f(\frac{(4k-n)\alpha_n}{2n}, \frac{(4j-n)\alpha_n}{2n}) P_{k,j}^{n-p}(\frac{x}{\alpha_n}, \frac{y}{\alpha_n}), \tag{18}$$

文[4]，[5]研究了经扩展后的 $B_n(f(\alpha_n t))$ 的收敛性和逼近阶的渐近表示，采用[5]的方法，关于

$B_n^{(p)}(f(\alpha_n t))$可证得如下结论

1° 设 $0<\theta<1/3$，$f^{(P)}(x,y)$连续且 $f^{(p)}=O(\exp\|X\|)(\|X\|\to\infty)$，则取 $\alpha_n=n^\theta$ 时有 $B_n^{(p)}(f(\alpha_n t))\to f(x,y)$，$n\to\infty$，$(x,y)\in T_n{}^\theta$，$X=(x,y)$，且上式在任意有界区域上一致成立.

2° 当连续的 $f^{(p)}(x,y)\in C(\exp^m\|X\|)$时有 $B_n^{(p)}(f(\alpha_n t))\to f(x,y)$，$n\to\infty$，$(x,y)\in T_{\alpha_n}$，$X=(x,y)$，且上式在任意有界区域上一致成立，其中取 $\alpha_n=\log^{m+1}(n)$.

采用本文定理 3、4 的证明方法可证得：

3° 若 $f^{(p)}(x,y)$在 T_{α_n} 上连续，则

$$|B_n^{(p)}(f(\alpha_n t))-f^{(p)}|\leqslant(1+4P\alpha_n)\omega(f^p;\frac{1}{n},\frac{1}{n})+3\omega(f^p;\frac{1}{\sqrt{n-p}},\frac{1}{\sqrt{n-p}})+\frac{p}{n}\|f^p\|,$$

$$|B_n^{(p)}(f(\alpha_n t))-f^{(p)}|\leqslant 3P\alpha_n\omega(f^p;\frac{1}{n})+\frac{p}{n}\|f^p\|+3\omega(f^p;\frac{1}{\sqrt{n-p}})$$

参考文献：

[1] KELISKY R and RILIN T. *Iterates of Bernstein polynomials* [J]. Pacific J. of Math., 1976, **21**: 511—520.

[2] NILSON C M, RIESENFELD R F and WEISS N A. *Iterates of Markov operator* [J]. J. of Approxi. Th., 1976, **17(4)**: 321—331.

[3] 常庚哲,冯玉瑜. 高维区域上的 Bernstein 多项式的迭代极限 [J]. 科学通报, 1985, **17**: 1285—1288.

[4] HSU L C. *Approximation of non-bounded continuous functions by certain sequence of linear positive operators or polynomials* [J]. Studia Math., 1961, **21**: 37—43.

[5] 徐利治,王仁宏. 扩展乘数法与无界函数的多项式逼近(Ⅰ) [J]. 吉林大学自然科学学报, 1963, **1**: 61—69.

[6] 王仁宏. 在全平面上用变形的 Landau 多项式和 Bernstein 多项式逼近无界连续函数的渐进公式 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1963, **2**: 119—129.

[7] 王仁宏. 高维欧氏空间上线性正算了对多元函数的逼近阶之渐进公式 [J]. 吉林大学自然科学学报, 1964, **1**: 1—16.

The Derivative Approximation by Bernstein Polynomial on a Triangle Field

XU Chun-ning

(Changchun Post and Telecomum. Inst., Jilin 130025)

Abstract: In this paper, we deal with the convergence order and iterative limit when the derivative approximating function of nonproduct Bernstein polynomial is defined on a triangle field.

Key words: Bernstein polynomial; derivative; approximation; convergence order; iterative limit.