Sasaki空间型$\overline{M}^{2n+1}(c)$中的极小积分子流形*

舒世昌 王新民
(陕西咸阳师专数学系, 咸阳712000) (陕西师范大学数学系, 西安710062)

摘 要: 本文重新给出了Sasaki空间型中极小积分子流形的关于Ricci曲率的内蕴刚性定理, 它改进了[2]及[3]中的有关定理, 而且取消了[3]中关于维数的限制. 对3维极小积分子流形, 又给出了一个关于数量曲率的内蕴刚性定理.

关键词: Sasaki空间, 积分子流形, 内蕴刚性
分类号: AMS(1991) 53C40/CLC O186.1
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0211-06

1 引 言

D. E. Blair和K. Ogiue在文[1]中研究了Sasaki空间型中具切触分布的积分子流形的微分几何. 设$\overline{M}^{2n+1}(c)$是$2n+1$维Sasaki空间型, 它具有切触φ截面曲率c, M是$\overline{M}^{2n+1}(c)$中的n维切触分布的积分子流形. S. Maeda[2]证明了:

定理A 设M是$\overline{M}^{2n+1}(c)$ $(c>-3)$的n维紧致极小积分子流形$(n\geq 5)$, 若M的Ricci曲率满足$\mathrm{Ric}(M)>(n-2-\frac{1}{n})\frac{c+3}{4}$, 则$M$是全测地的.

文[3]将M的维数n限制为奇数, 在奇维数的情况下改进了定理A, 文[3]证明了:

定理B 设M是$\overline{M}^{2n+1}(c)$ $(c>-3)$的n维紧致极小积分子流形$(n\geq 5)$, 且n为奇数, 若M的Ricci曲率满足$\mathrm{Ric}(M)\geq(n-2-\frac{2}{n-1})\frac{c+3}{4}$, 则$M$是全测地的.

本文取消了[3]中对n为奇维数及$n\geq 5$的限制, 利用S. T. Yau的方法, 通过建立了若干引理, 证明了:

定理1 设M是$\overline{M}^{2n+1}(c)$ $(c>-3)$的n维紧致极小积分子流形, 若M的Ricci曲率满足$\mathrm{Ric}(M)\geq\frac{4n-6}{5}\cdot\frac{c+3}{4}$, 则$M$是全测地的.

显然, 定理1当$n=5$时与定理A一致. 当$n>5$时, 拚挤常数比定理A和定理B的拚挤常数都小, 因而既改进了定理A又改进了定理B, 而且取消了定理B中对n为奇维数的限制.

对于$\overline{M}^{7}(c)$ $(c>-3)$中的3维极小积分子流形, 利用沈一兵的方法(参见[4])证明了:

---

* **收稿日期**: 1996-12-09
基金项目: 陕西省教委自然科学基金(97JK022)
作者简介: 舒世昌(1963-), 男, 陕西人, 硕士, 咸阳师专副教授.

定理2 设M^3是$\overline{M}^7(c)$ $(c>-3)$的3维紧致极小积分子流形，若M^3的数量曲率满足 $\rho>\frac{5}{6}(c+3)$，则M^3是全测地的

2 基本公式

除特别说明外，本文使用[1]中的记号。

设M 是$\overline{M}^{2n+1}(c)$中的n维切触分布的积分子流形，选取$\overline{M}^{2n+1}(c)$的正交标架场$e_0=\xi, e_1, \cdots, e_n, e_{1^*}=\varphi e_1, \cdots, e_{n^*}=\varphi e_n$，使得$e_1, \cdots, e_n$切于$M$．约定指标取值范围是$A, B, C, \cdots=0, 1, \cdots, n, 1^*, \cdots, n^*$．$i, j, k, \cdots,=1, \cdots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \cdots=0, 1^*, \cdots, n^*$.

设$\{\omega_A\}$是对偶标架场，当限制在M 上时有

$$\omega_0=0, \quad \omega_{\alpha i}=\sum_j h_{ij}^{\alpha}\omega_j,$$

$$h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha}, \quad h_{ij}^{k^*}=h_{jk}^{i^*}=h_{ik}^{j^*}, \quad h_{ij}^{0}=0, \tag{2.1}$$

M 的第二基本形式σ是$\sigma=\sum_{ij\alpha}h_{ij}^{\alpha}\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha$，其长度平方$\|\sigma\|^2=\sum_{ij\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2$. M 的Gauss-Codazzi-Ricci方程为

$$R_{ijkl}=\frac{1}{4}(c+3)(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}-h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}), \tag{2.2}$$

$$h_{ijk}^{\alpha}=h_{ikj}^{\alpha}, \tag{2.3}$$

$$R_{\alpha\beta ij}=\frac{1}{4}(c-1)(\varphi_{\alpha i}\varphi_{\beta j}-\varphi_{\alpha j}\varphi_{\beta i})+\sum_k(h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\beta}-h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}), \tag{2.4}$$

其中R_{ijkl}和$R_{\alpha\beta ij}$分别是$\overline{M}^{2n+1}(c)$中M 切联络和法联络的曲率张量，$\varphi_{\alpha i}=\langle\varphi e_\alpha, e_i\rangle$. 因为$M$ 极小，M 的Ricci曲率和数量曲率分别为

$$R_{ij}=\frac{1}{4}(n-1)(c+3)\delta_{ij}-\sum_{\alpha k}h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}, \tag{2.5}$$

$$\rho=\frac{1}{4}n(n-1)(c+3)-\|\sigma\|^2. \tag{2.6}$$

如果H_α和Δ分别表示$(n\times n)$-矩阵(h_{ij}^{α})和M 的拉普拉氏，在[1]中已算得

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\sigma\|^2)=\sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)^2-\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2+\frac{1}{4}[n(c+3)+c-1]\|\sigma\|^2. \tag{2.7}$$

利用S. T. Yau 的技巧(参见[5])，对任意实数a,

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\sigma\|^2)=\sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2+(1+a)\sum_{ijkl\alpha}h_{ij}^{\alpha}(h_{lk}^{\alpha}R_{lijk}+h_{li}^{\alpha}R_{lkjk})+\frac{1-a}{2}\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)^2+a\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2-\frac{na(c+3)-(c-1)}{4}\|\sigma\|^2. \tag{2.8}$$

3　主要定理的证明

首先在[5]**或**[6]**中有**:

引理1[5, 6]

$$\sum_{ijk\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 \geq \|\sigma\|^2. \qquad (3.1)$$

可建立下面的引理:

引理2　**设** M **是** $\bar{M}^{2n+1}(c)$ $(c>-3)$ **的** n **维极小积分子流形**, **则**

$$\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha)^2 \geq [4Q-(n-1)(c+3)]\|\sigma\|^2 + \frac{4}{n}\sum_\alpha(\mathrm{tr}H_\alpha^2)^2. \qquad (3.2)$$

证明　**对固定的** α, **设** λ^α_i **是矩阵** H_α **的特征值**, **适当选取局部正交标架场** $\{e_i\}$ **可使** H_α **对角化**, **且** $h^\alpha_{ii}=\lambda^\alpha_i$, **由**(2.5)**对每一** k, **有**

$$\sum_{\substack{i\\ \beta\neq\alpha}}(h^\beta_{ik})^2 \leq \frac{1}{4}(n-1)(c+3)-Q-(\lambda^\alpha_k)^2.$$

因此

$$-\sum_\beta \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha)^2 = \sum_{\substack{i,k\\ \beta\neq\alpha}}(h^\beta_{ik})^2(\lambda^\alpha_i-\lambda^\alpha_k)^2$$

$$\leq 4\sum_{\substack{i,k\\ \beta\neq\alpha}}(h^\beta_{ik})^2(\lambda^\alpha_k)^2 \leq 4\sum_k\left[\frac{1}{4}(n-1)(c+3)-Q-(\lambda^\alpha_k)^2\right](\lambda^\alpha_k)^2$$

$$=[(n-1)(c+3)-4Q]\sum_k(\lambda^\alpha_k)^2 - 4\sum_k(\lambda^\alpha_k)^4$$

$$\leq [(n-1)(c+3)-4Q]\sum_k(\lambda^\alpha_k)^2 - \frac{4}{n}\left[\sum_k(\lambda^\alpha_k)^2\right]^2,$$

两边对 α **求和即得**(3.2).

引理3　**设** M **是** $\bar{M}^{2n+1}(c)$ $(c>-3)$ **的** n **维极小积分子流形**, **则**

$$\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) = \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2. \qquad (3.3)$$

证明　**由**(2.1)**有**

$$\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2) = \sum_{\substack{\alpha,\beta\\ l,m,n,k}}h^\alpha_{kl}h^\alpha_{lm}h^\beta_{mn}h^\beta_{nk} = \sum_{\substack{\alpha\neq 0,\beta\neq 0\\ l,m,n,k}}h^\alpha_{kl}h^\alpha_{lm}h^\beta_{mn}h^\beta_{nk}$$

$$=\sum_{\substack{i^*,j^*\\ l,m,n,k}}h^{i^*}_{kl}h^{i^*}_{lm}h^{j^*}_{mn}h^{j^*}_{nk} = \sum_{\substack{k^*,m^*\\ i,j,l,n}}h^{k^*}_{il}h^{m^*}_{li}h^{m^*}_{jn}h^{k^*}_{nj}$$

$$=\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ i,j,l,n}}h^\alpha_{il}h^\beta_{li}h^\beta_{jn}h^\alpha_{nj} = \sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2.$$

引理4　**设** M **是** $\bar{M}^{2n+1}(c)$ $(c>-3)$ **的** n **维极小积分子流形**, **则**

$$-\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2 \geq \|\sigma\|^2\left[Q-\frac{1}{4}(n-1)(c+3)\right]. \qquad (3.4)$$

证明 首先, 下列等式是熟知的

$$\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta - H_\beta H_\alpha)^2 = -2\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2], \tag{3.5}$$

在(2.8)式先令 $a=0$, 后令 $a=1$, 所得两等式相减, 并利用(3.5)有

$$-\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2 = \sum_{\substack{ijkl\\ \alpha}} h_{ij}^\alpha(h_{lk}^\alpha R_{lijk} + h_{li}^\alpha R_{lkjk}) + \sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \operatorname{tr}(H_\alpha H_\beta)^2] -$$

$$\frac{n}{4}(c+3)\|\sigma\|^2, \tag{3.6}$$

对固定的 α, 如同引理2的证明一样, 适当选取局部正交标架场 $\{e_i\}$, 有 $\sum_{i,j}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha = (\operatorname{tr}H_\alpha)^2 = 0$. 更进一步由引理3, $\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) = \sum_\alpha(\sum_{ij\beta}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha h_{ii}^\beta h_{jj}^\beta)$. 因此, 由(2.2), (3.6)式变为

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha,\beta}[\operatorname{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2\\
&= \sum_\alpha\Big[\frac{1}{2}\sum_{ij}(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)^2 R_{ijij} + \sum_{ij\beta}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha h_{ii}^\beta h_{jj}^\beta - \sum_{ij\beta}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha h_{ij}^\beta h_{ij}^\beta\Big] - \frac{n}{4}(c+3)\|\sigma\|^2\\
&= \sum_\alpha\Big[\sum_{ij}(\lambda_i^\alpha)^2 R_{ijij} - \sum_{ij}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha\Big(R_{ijij} + \sum_\beta h_{ij}^\beta h_{ij}^\beta - \sum_\beta h_{ii}^\beta h_{jj}^\beta\Big)\Big] - \frac{n}{4}(c+3)\|\sigma\|^2\\
&= \sum_\alpha\sum_i(\lambda_i^\alpha)^2 R_{ii} - \sum_{ij\alpha}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha\frac{c+3}{4}(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ij}) - \frac{n}{4}(c+3)\|\sigma\|^2\\
&\geq Q\|\sigma\|^2 - \frac{c+3}{4}\sum_{ij\alpha}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\alpha + \frac{c+3}{4}\sum_{i,\alpha}(\lambda_i^\alpha)^2 - \frac{n}{4}(c+3)\|\sigma\|^2\\
&= Q\|\sigma\|^2 + \frac{c+3}{4}\|\sigma\|^2 - \frac{n}{4}(c+3)\|\sigma\|^2\\
&= \Big[Q - \frac{1}{4}(n-1)(c+3)\Big]\|\sigma\|^2,
\end{aligned}$$

Q 为 Ricci 曲率的下确界

定理1的证明 若 $Q \geq \frac{4n-6}{5}\frac{c+3}{4}$ 时, 在(2.7)中, 利用引理1, 引理2, 引理4

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(\|\sigma\|^2) &\geq \|\sigma\|^2 + [4Q - (n-1)(c+3)]\|\sigma\|^2 + \frac{4}{n}\sum_\alpha(\operatorname{tr}H_\alpha^2)^2 +\\
&\quad \|\sigma\|^2\Big[Q - \frac{1}{4}(n-1)(c+3)\Big] + \frac{(n+1)(c+3)}{4}\|\sigma\|^2 - \|\sigma\|^2\\
&= \Big[5Q - \frac{4n-6}{4}(c+3)\Big]\|\sigma\|^2 + \frac{4}{n}\sum_\alpha(\operatorname{tr}H_\alpha^2)^2\\
&\geq \Big[5Q - \frac{4n-6}{4}(c+3)\Big]\|\sigma\|^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

由于 M 紧致, 由 Hopf 引理, $\Delta(\|\sigma\|^2) = 0$, 因而(3.7)中所有等式都成立, 特别地, 有 $\sum_\alpha(\operatorname{tr}H_\alpha^2)^2 = 0$, 因此对任意的 α, $\operatorname{tr}H_\alpha^2 = 0$ 即有 $\|\sigma\|^2 = \sum_\alpha\operatorname{tr}H_\alpha^2 = 0$. 因此, M 是全测地的

定理2的证明 利用沈一兵在[4]中的方法, 设 $UM \to M^3$ 是 M^3 的单位切丛, 定义函数 $f: UM \to R$ 为

$$f(u) = \|\sigma(u,u)\|^2 = \sum_\alpha\Big(\sum_{ij}h_{ij}^\alpha u^i u^j\Big)^2, \quad \forall u \in UM, \tag{3.8}$$

因为UM 是紧致的, 故函数f 必在UM 上的某个向量处达到它的最大值, 设此向量是$v\in M_{x_0}$, $x_0\in M^3$在点x_0取$e_1=v$, 并令

$$b_{ij}=\sum_{\alpha}h_{11}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}. \tag{3.9}$$

由f 在x_0处取得极大值(见[4])

$$f(v)=b_{11}=\max_{u\in UM}\{\|\sigma(u,u)\|^2\}, \tag{3.10}$$

$$b_{ij}=0,\ i\neq j, \tag{3.11}$$

$$2\sum_{\alpha}(h_{1k}^{\alpha})^2+b_{kk}-b_{11}\leq 0\ (k\neq 1), \tag{3.12}$$

$$0\geq\sum_{\alpha i}h_{11}^{\alpha}h_{11ii}^{\alpha}=\sum_{i}(b_{ii}R_{i11i}+b_{11}R_{1i1i})+\sum_{\alpha,\beta,i}h_{11}^{\alpha}h_{1i}^{\beta}R_{\beta\alpha 1i}, \tag{3.13}$$

其中R_{ijkl}和$R_{\alpha\beta ij}$分别表示M^3的切丛和法丛上的曲率张量

在M 上定义4阶共变张量场L 为

$$L(x,y,z,w)=\langle\sigma(x,y),\sigma(x,w)\rangle$$

这里$x,y,z,w\in X(M)$, 记$(\Delta L)_{ijkl}=(\Delta L)(e_i,e_j,e_k,e_l)$, 则

$$\frac{1}{2}(\Delta L)_{1111}=\sum_{\alpha,k}(h_{11k}^{\alpha})^2+\sum_{\alpha,k}h_{11}^{\alpha}h_{11k}^{\alpha}\ (\text{参见[3](3.19)}).$$

与[3]中的讨论完全相同, 当$n=3$时, 有(参见[3]中(3.26))

$$\frac{1}{2}(\Delta L)_{1111}\geq(c+3)f(v)+2\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}b_{kk}(h_{1k}^{\alpha})^2-2f(v)\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}(h_{1k}^{\alpha})^2-\sum_{k\neq 1}(b_{kk})^2-f(v)b_{11}. \tag{3.14}$$

设$x_0\in M^3$和$v=e_1\in UM_{x_0}$使(3.8)定义的函数f 达到极大值, 以下的讨论均在点x_0进行, 由(3.9), (3.10)易见

$$(b_{kk})^2\leq\left(\sum_{\alpha}(h_{11}^{\alpha})^2\right)\left(\sum_{\alpha}(h_{kk}^{\alpha})^2\right)\leq(b_{11})^2,\ k\neq 1. \tag{3.15}$$

由此及三维极小性, 便有

$$b_{22}\leq 0,\ b_{33}\leq 0,\ \sum_{k\neq 1}(b_{kk})^2\leq\left(\sum_{k\neq 1}b_{kk}\right)^2=(b_{11})^2. \tag{3.16}$$

由(3.16)与(3.12), (3.15)分别有

$$\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}b_{kk}(h_{1k}^{\alpha})^2\geq\frac{1}{2}\sum_{k\neq 1}(b_{11}-b_{kk})b_{kk}=-\frac{1}{2}\sum_{i}(b_{ii})^2, \tag{3.17}$$

$$\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}b_{kk}(h_{1k}^{\alpha})^2\geq -f(v)\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}(h_{1k}^{\alpha})^2. \tag{3.18}$$

将(3.17), (3.18)分别代入(3.14), 并由(3.15)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\Delta L)_{1111}\geq{}&(c+3)f(v)+\left[\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}b_{kk}(h_{1k}^{\alpha})^2-2f(v)\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}(h_{1k}^{\alpha})^2\right]+\\&\left[\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}b_{kk}(h_{1k}^{\alpha})^2-\sum_{k\neq 1}(b_{kk})^2+f(v)b_{11}\right]\\\geq{}&(c+3)f(v)-3f(v)\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}(h_{1k}^{\alpha})^2-\frac{1}{2}\sum_{i}(b_{ii})^2-\sum_{k\neq 1}(b_{kk})^2-f(v)b_{11}\end{aligned}$$

$$= (c+3)f(v) - 3f(v)\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}(h_{1k}^{\alpha})^2 - \frac{3}{2}\sum_{k\neq 1}(b_{kk})^2 - \frac{3}{2}f(v)b_{11}$$

$$\geq \frac{3}{2}f(v)\left[\frac{2}{3}(c+3) - 2\sum_{\substack{\alpha\\k\neq 1}}(h_{1k}^{\alpha})^2 - \sum_{\alpha,i}(h_{ii}^{\alpha})^2\right]$$

$$\geq \frac{3}{2}f(v)\left[\frac{2}{3}(c+3) - \|\sigma\|^2(x_0)\right] \tag{3.19}$$

当M^3的数量曲率$\rho > \frac{5}{6}(c+3)$时，$\|\sigma\|^2 < \frac{2}{3}(c+3)$，由广义Bochner引理(见[7]中命题3.1)知$(\Delta L)_{1111} = 0$，于是$f(v) = 0$，M^3全测地

参 考 文 献

[1] Blair D E and Ogiue K. *Geometry of integral submanifolds of a contact distribution* [J]. Illinois J. Math., 1975, **19**: 269-276.

[2] Maeda S. *On integral submanifolds of a contact distribution of a sasakian space form* [J]. Tensor N. S., 1981, **35**: 200-204.

[3] 瞿成勤. Sasaki空间形式$\overline{M}^{2n+1}(c)$中奇维极小积分子流形的Ricci曲率 [J]. 数学年刊A辑, 1996, **17** (4): 371-376.

[4] Shen Y B. *On intrinsic rigidity for minimal submainfolds in a sphere* [J]. Scie. in China (Ser. A), 1989, **32**: 769-781.

[5] Blair D E and Ogiue K. *Positively curved integral submanifold of a contact distribution* [J]. Illinois J. Math., 1975, **19**: 628-631.

[6] Ikawa T, Kon M and Yamaguchi S. *On c-totally real submanifolds* [J]. J. Diff. Geom., 1976, **11**: 59-64.

[7] Gauchman H. *Pinching theorems for totally real minimal submanifolds of $CP^n(c)$* [J]. Tohoku Math. J., 1989, **41**: 249-257.

On Minimal Integral Submanifolds of Sasaki Space Form

Shu Shichang

(Dept. of Math., Xianyang Teachers' College, 712000)

Wang Xinmin

(Dept. of Math., Shanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract

Some new intrinsic rigidity theorems of minimal integral submanifolds in a sasaki space form are obtained, so the corresponding results due to Maeda[2] and Qu[3] are improved.

Keywords sasaki space form, integral submanifold, intrinsic rigidity.