第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

一个积分型的Hilbert定理的改进*

杨 必 成

(广东教育学院数学系, 广州510303)

摘 要: 本文证明如下权函数的不等式: 对任意实数 $x>0$ 及 $r>1$,

$$\omega(r,x)=\int_0^\infty \frac{1}{x+y+1}\left(\frac{2x+1}{2y+1}\right)\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\pi/r)}-\frac{\ln 2}{(2x+1)^{1-1/r}}$$

从而改进了积分型的Hilbert定理.

关键词: Hilbert不等式, 权函数, Hölder不等式

分类号: AMS(1991) 26D15/CLC O178

文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0230-03

Hilbert定理是分析学的一个重要定理. 关于积分型Hilbert不等式, 胡克[1]曾引进非负因子, 作出有意义的改进. 关于相应的级数型Hilbert不等式, 徐利治[3]首倡权系数的方法, 作出加强型的改进, 由此引发[4]等的讨论. 本文将权系数的方法应用于积分型, 建立下列权函数

$$\omega(r,x)=\int_0^\infty \frac{1}{x+y+1}\left(\frac{2x+1}{2y+1}\right)^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}y,\quad x>0,r>1 \tag{1}$$

的不等式, 对"较为精确"的积分型Hardy-Hilbert不等式[2]

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\int_0^\infty f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

$(f,g\neq 0)$ 作加强的改进; 并改进Hilbert不等式 $(p=q=2)$. 这就是下面定理:

定理 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,f,g\geq 0,\ 0<\int_0^\infty f^p(x)\,\mathrm{d}x<\infty,\ 0<\int_0^\infty g^q(x)\,\mathrm{d}x<\infty$. 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$<\left\{\int_0^\infty\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{\ln 2}{(2x+1)^{1/p}}\right]f^p(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{\ln 2}{(2x+1)^{1/q}}\right]g^q(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

当 $p=q=2$ 时, 还有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$<\pi\left\{\int_0^\infty\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right]f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^\infty\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right]g^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

* **收稿日期**: 1996-06-24

作者简介: 杨必成(1947-), 男, 广东汕尾人, 广东教育学院教授.

注　由(3)可推出(2),故(3)是(2)的改进;(4)是相应的 Hilbert 不等式的改进

引理1[4]　设 $\omega \geq 1,\ r > 1$,则 $\int_0^{\frac{1}{\omega}} \frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \mathrm{d}t \geq \frac{r}{r-1} \frac{(2r-1)\omega^{1/r}}{\omega(2r-1)+r-1}$.

引理2　设 $r > 1$,则 $g(x):=(2x+1)^{1-\frac{1}{r}} \int_0^{\frac{1}{2x+1}} \frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \mathrm{d}t$ 在 $[0,\infty)$ 严格递增(证明从略).

引理3　对任意实数 $x > 0$ 及 $r > 1$,由(1)定义的权函数有如下不等式:

$$\omega(r,x) < \frac{\pi}{\sin(\pi/r)} - \frac{\ln 2}{(2x+1)^{1-1/r}}. \tag{5}$$

当 $p=q=2$ 时,还有

$$\omega(2,x) < \pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right). \tag{6}$$

定理的证明　由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left(\frac{2x+1}{2y+1}\right)^{\frac{1}{pq}} \frac{f(x)}{(x+y+1)^{1/p}} \left(\frac{2y+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{pq}} \frac{g(y)}{(x+y+1)^{1/q}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leq \left\{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left(\frac{2x+1}{2y+1}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{f^p(x)}{x+y+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left(\frac{2y+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{g^q(x)}{x+y+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{\int_0^{\infty}\omega(q,x)f^p(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^{\infty}\omega(p,y)g^q(y)\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

由(5),因 $\pi/\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) = \pi/\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$,代入(7),可得(3)式 在(7)中取 $p=q=2$,由(6),可得(4)式 证毕

推论　设 $p > 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ f, g \geq 0,\ 0 < \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x < \infty,\ 0 < \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. 则

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&< \left\{\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{\ln 2}{(2x)^{1/p}}\right] f^p(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{\ln 2}{(2x)^{1/q}}\right] g^q(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

当 $p=q=2$ 时,还有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \pi\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2x}}\right] f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2x}}\right] g^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

证明　设 $u = x-\frac{1}{2},\ v = y-\frac{1}{2}$. 由(3)有

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{f\left(u+\frac{1}{2}\right)g\left(v+\frac{1}{2}\right)}{u+v+1}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&< \left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{\ln 2}{(2u+1)^{1/p}}\right] f^p\left(u+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot
\end{aligned}$$

$$\left\{\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}-\frac{\ln 2}{(2v+1)^{1/q}}\right]g^{q}\left(v+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

再把(10)的变量代回 x, y, 可得(8)式 用同样的变换, 由(4)可得(9)式 □

参 考 文 献

[1] He Ke. *On Hilbert's inequality* [J]. Chin. Ann. Math., 1992, **13**B (1): 35-39.

[2] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. *Inequalities* [M]. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

[3] Xu C L and Guo Yongkang. *Note on Hardy-Riesz's extension of Hilbert's inequality* [J]. Chin. Quar. J. Math., 1991, **6**(1): 75-77.

[4] 高明哲. Hardy-Riesz 拓广了的 Hilbert 不等式的一个改进 [J]. 数学研究与评论, 1994, **14**(2): 255-259.

A Refinement of the Integral Type Hilbert's Inequality

Yang Bicheng

(Dept. of Math., Guangdong Education College, Guangzhou 510303)

Abstract

This paper proves the following inequality of the weight function:

$$\omega(r, x) = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{x+y+1}\left(\frac{2x+1}{2y+1}\right)\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sin(\pi/r)} - \frac{\ln 2}{(2x+1)^{1-1/r}} \quad (x > 0, r > 1)$$

is true. Then the integral type Hilbert's theorem is refined.

Keywords Hilbert's inequality, weight function, Hölder's inequality.