

## Beta 算子的 $L_p$ -逼近\*

谢 林 森

(丽水师范专科学校数学系, 浙江323000)

摘 要: 本文对于一类函数给出了Beta 算子  $L_p$ -逼近的特征刻画

关键词: Beta 算子,  $L_p$ -逼近, 光滑模

分类号: AMS(1991) 41A36/CLC O174.41

文献标识码: A 文章编号: 1000-341X(1999)增刊-0258-03

### 1 引 言

设  $f \in L^p[0, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , 记  $\|f\|_p = \|f\|_{L^p[0, \infty)}$ , Beta 算子定义为

$$\beta_n(f, x) = \int_0^\infty b_n(x, u) f(1/u) du \quad (x > 0),$$

其中  $b_n(x, u) = \frac{x^n}{B(n, n)} \cdot \frac{u^{n-1}}{(1+xu)^{2n}}$ ,  $B(n, n) = ((n-1)!)^2 / (2n-1)!$ . Ditzian-Totik 光滑模为

$$\omega_p^2(f, t)_p = \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_h^2 f\|_p,$$

这里  $\Delta_h^2 f(x) = \begin{cases} f(x+h) - 2f(x) + f(x-h), & x \in [h, \infty); \\ 0, & x \in [0, h). \end{cases}$

最近, 周定轩证明了

定理1<sup>[1]</sup> 设  $f \in L^p[0, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 则

$$\|\beta_n(f) - f\|_p = O(n^{-\alpha})$$

的充要条件是  $\omega_p^2(f, t)_p = O(t^{2\alpha})$ .

设  $S_2$  是由满足如下条件的函数  $\psi$  组成:  $\psi(t) > 0$  ( $0 < t \leq 1$ ) 是单调增加的函数, 且对某一  $k > 1$ ,

$$t^{\frac{2-k}{k}} \int_0^1 \frac{\psi(\eta)}{\eta^{\frac{2-k}{k}}} d\eta = O(\psi(t)).$$

本文证明了

定理2 设  $f \in L^p[0, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\psi \in S_2$ , 则

$$\|\beta_n(f) - f\|_p = O(\psi(\sqrt{\frac{1}{n}}))$$

\* 收到日期: 1997-12-24

的充要条件是  $\omega_p^2(f, t)_p = O(\Psi(t))$ .

注记 若取  $\Psi(t) = t^{2\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 则定理2就是定理1.

## 2 引理和定理2的证明

对于  $1 \leq p \leq \infty$ , 加权 Sobolev 空间为

$$D = \{g \in L^p[0, \infty) : g' \in A.C_{loc}, \Phi g'' \in L^p[0, \infty)\},$$

当  $f \in L^p[0, \infty)$  时,  $K$ -泛函为

$$K_{\Phi, 2}(f, t^2)_p = \inf_{g \in D} \{ \|f - g\|_p + t^2 \|\Phi g''\|_p \} \quad (t > 0).$$

由[2], 对于  $f \in L^p[0, \infty)$ , 存在常数  $C > 0$ , 使得

$$C^{-1} \omega_p^2(f, t)_p \leq K_{\Phi, 2}(f, t^2)_p \leq C \omega_p^2(f, t)_p.$$

需要如下引理

引理1<sup>[3]</sup> 设  $u_1(x), u_2(x)$  是非负的单调增加函数,  $r > 0, C > 1$ . 若对于任意  $0 < t, h \leq 1$ ,  $u_1(t) \leq C(u_2(h) + (\frac{t}{h})^r u_1(h))$ , 则

$$u_1(h) \leq A h^{r-\frac{1}{k}} \int_0^1 \frac{u_2(\eta)}{\eta^{r+1-\frac{1}{k}}} d\eta$$

这里  $k > 1, A$  是常数

引理2<sup>[1]</sup> 设  $1 \leq p \leq \infty, n \geq 2$ , 则

$$(i) \quad \|\beta_n(f)\|_p \leq 2 \|f\|_p, \quad f \in L^p[0, \infty); \quad (2.1)$$

$$(ii) \quad \|\beta_n(f) - f\|_p \leq A n^{-1} \|\Phi f''\|_p, \quad f \in D; \quad (2.2)$$

$$(iii) \quad \|\Phi(\beta_n(f))\|_p \leq 3n \|f\|_p, \quad f \in L^p[0, \infty); \quad (2.3)$$

$$(iv) \quad \|\Phi(\beta_n(f))\|_p \leq 2 \|\Phi f''\|_p, \quad f \in D. \quad (2.4)$$

(2.1)式由[1]中的引理2.3立即可推得

定理2的证明 充分性 对于  $f \in L^p[0, \infty)$  和  $n$ , 选取  $g_n \in D$ , 使得

$$\begin{aligned} \|f - g_n\|_p &\leq 2K_{\Phi, 2}(f, n^{-1})_p \leq 2C \omega_p^2(f, n^{-1/2})_p, \\ \|\Phi g_n''\|_p &\leq 2nK_{\Phi, 2}(f, n^{-1})_p \leq 2Cn \omega_p^2(f, n^{-1/2})_p. \end{aligned}$$

从而, 根据(2.1)和(2.2), 有

$$\begin{aligned} \|\beta_n(f) - f\|_p &\leq \|\beta_n(f - g_n) - (f - g_n)\|_p + \|\beta_n(g_n) - g_n\|_p \\ &\leq 3 \|f - g_n\|_p + A n^{-1} \|\Phi g_n''\|_p \\ &\leq M \omega_p^2(f, n^{-1/2})_p \leq M \Psi\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right), \end{aligned}$$

这里  $M$  表示与  $n$  无关的常数, 以下均同, 只是在不同的地方取值可能不同

必要性 对于  $0 < t, h \leq 1$ , 选取  $n$ , 使得  $\sqrt{\frac{1}{n}} \leq h < \sqrt{\frac{2}{n}}$ . 根据  $K$ -泛函的定义, 存在  $g_n \in D$ , 使得

$$\|f - g_n\|_p \leq 2K_{\Phi, 2}(f, n^{-1})_p, \quad \|\Phi g_n''\|_p \leq 2nK_{\Phi, 2}(f, n^{-1})_p.$$

于是, 根据(2.3)和(2.4), 有

$$\begin{aligned}\|\tilde{\Phi}(\beta_n(f))\|_p &\leq \|\tilde{\Phi}(\beta_n(f - g_n))\|_p + \|\tilde{\Phi}(\beta_n(g_n))\|_p \\ &\leq 3n\|f - g_n\|_p + 2\|\tilde{\Phi}g_n\|_p \\ &\leq 10nK_{\varphi_2}(f, n^{-1})_p,\end{aligned}$$

从而, 对于  $0 < t, h \leq 1$ , 有

$$\begin{aligned}K_{\varphi_2}(f, t^2)_p &\leq \|\beta_n(f) - f\|_p + t^2\|\tilde{\Phi}(\beta_n(f))\|_p \\ &\leq M\psi\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) + 10t^2nK_{\varphi_2}(f, n^{-1})_p \\ &\leq M\psi(h) + 20t^2h^{-2}K_{\varphi_2}(f, h^2)_p.\end{aligned}$$

根据引理1, 有

$$K_{\varphi_2}(f, t^2)_p \leq A t^{2-\frac{1}{k}} \int_{t^2-\frac{1}{k}}^1 \frac{\psi(\eta)}{\eta^{2-\frac{1}{k}}} d\eta \leq M\psi(t),$$

所以

$$\omega_{\varphi}^2(f, t)_p \leq CK_{\varphi_2}(f, t^2)_p \leq M\psi(t).$$

这样, 完成了定理2的证明

致谢 作者衷心感谢谢庭藩教授的悉心指导和帮助

## 参 考 文 献

- [1] Zhou Dingxuan  $L^p$ -inverse theorems for Beta operators [J] J. Approx. Theory, 1991, **66**: 279- 287.
- [2] Ditzian Z and Totik V. *Moduli of Smoothness* [M] Springer-Verlag, New York, 1987.
- [3] 周信龙 关于 Bernstein 多项式 [J] 数学学报, 1985, **28**: 848- 855

## $L_p$ -Approximation for Beta Operators

Xie Linsen

(Dept. of Math., Lishui Teachers' College, Zhejiang 323000)

### Abstract

In the paper, we give characterization for  $L_p$ -approximation of Beta operators for a class of functions

**Keywords** Beta operators,  $L_p$ -approximation, moduli of smoothness