第19卷　增刊　　数学研究与评论　　Vol. 19 Supp
1999年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Apr. 1999

分配 P-代数中的0-理想*

杨　云
(湖北教育学院数学系, 武汉430060)

摘　要: 本文对分配 P-代数中的0-理想进行了初步探讨. 给出了0-理想的刻画并利用它得到了一些结果.

关键词: 分配 P-代数, $*$-同余关系, 0-理想
分类号: AMS(1991) 06D25/CLC O153.1
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0291-04

在这篇文章中提出了分配 P-代数中0-理想的概念, 并对其进行了初步的研究. 得到一个理想是0-理想的充要条件. 在此基础上得到某些满足一定条件的理想是0-理想等一些结果.

1　基本概念

分配 P-代数是指一个(2, 2, 1, 0, 0)型代数 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$. 其中 $(L;\wedge,\vee,0,1)$ 是分配格, 0, 1分别是 L 的最小元与最大元. 一元运算 $*$ 指: $\forall a\in L$, 存在 $a^*\in L$ 使得 $\forall x\in L$, $a\wedge x=0\Leftrightarrow x\leq a^*$. 在分配 P-代数中一元运算 $*$ 是最基本的, 也是非常重要的运算. 关于一元运算 $*$, 它具有以下运算法则 $(\forall x,y\in L)$:

(1) $x\leq x^{**}$;　(2) $x^{***}=x^*$;

(3) $(x\vee y)^*=x^*\wedge y^*$;　(4) $(x\wedge y)^{**}=x^{**}\wedge y^{**}$.

证明见文[1].

这些运算法则在下面的证明中常常用到.

定义1　设 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$ 是分配 P-代数, θ 是 L 上的格同余关系, 若 θ 保持一元运算 $*$ (即 $x\equiv y(\theta)\Rightarrow x^*\equiv y^*(\theta)$), 称 θ 是 L 上的 $*$-同余关系, 记为 θ_*.

定义2　设 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$ 是分配 P-代数, J 是 L 的理想, 如果存在 L 的滤子 F 使得 $J=\ker\Phi_*(F)=\{x\in L\mid x\equiv 0(\Phi_*(F))\}$, 称 J 是0-理想(其中 $\Phi_*(F)$ 表示以 F 为余核的最小 $*$-同余关系, 即 $F=\mathrm{cok}\Phi_*(F)=\{x\in L\mid x\equiv 1(\Phi_*(F))\}$).

定义3　设 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$ 是分配 P-代数, I 是 L 的真理想, F 是 L 的滤子, 如果满足: $\forall x,y\in L.\ x\wedge y\in I, y\in F\Rightarrow x\in I$, 称理想 I 相对于滤子 F 是素的.

* 收稿日期: 1996-09-16
作者简介: 杨　云(1956-), 女, 湖北省武汉市人, 现为湖北教育学院副教授.

2 主要结果

引理1[2] 设$(L;\wedge,\vee,{}^*,0,1)$是分配P-代数,$a,b\in L$,$a\le b$,则

$$\theta_*(a,b)=\theta(a,b)\vee\theta((a^*\wedge b)^*,1).$$

推论1 $\forall a\in D(L)=\{x\in L\mid x^*=0\}$,$\theta(a,1)$是$*$-同余关系

证明 因为$a\in D(L)$,所以$a^*=0$. 由引理1知

$$\theta_*(a,1)=\theta(a,1)\vee\theta((a^*\wedge 1)^*,1)=\theta(a,1)\vee\theta(0^*,1)$$
$$=\theta(a,1)\vee\theta(1,1)=\theta(a,1).$$

故$\theta(a,1)=\theta_*(a,1)$是$*$-同余关系

推论2 $\forall a\in L$,$\theta(a^*,1)$是$*$-同余关系

证明 由引理1,

$$\theta_*(a^*,1)=\theta(a^*,1)\vee\theta(((a^*)^*\wedge 1)^*,1)=\theta(a^*,1)\vee\theta(a^{***},1)$$
$$=\theta(a^*,1)\vee\theta(a^*,1)=\theta(a^*,1).$$

故$\theta(a^*,1)=\theta_*(a^*,1)$是$*$-同余关系

引理2 设$(L;\wedge,\vee,{}^*,0,1)$是分配P-代数,F是L的滤子,$\Phi_*(F)$表示以F为余模的最小$*$-同余关系,则$\Phi_*(F)=\theta_1\vee\theta_2$. 其中$\theta_1=\bigvee_{x\in F}\theta(x^{**},1)$,$\theta_2=\bigvee_{x\in F}\theta(x\vee x^*,1)$.

证明 因为$x\vee x^*\in D(L)$,由推论1知$\theta(x\vee x^*,1)$是$*$-同余关系,所以θ_2是$*$-同余关系

由推论2知,$\theta(x^{**},1)$是$*$-同余关系,于是θ_1是$*$-同余关系. 故$\theta_1\vee\theta_2$是$*$-同余关系

令$\Phi_*=\theta_1\vee\theta_2$以下证明$\Phi_*$是以$F$为余核的最小$*$-同余关系

$\forall x\in \mathrm{cok}\Phi_*=\{y\in L\mid y\equiv 1(\Phi_*)\}\Rightarrow x\equiv 1(\Phi_*)$即$x\equiv 1(\theta_1\vee\theta_2)$. 由于$\theta_1,\theta_2$均是格同余关系由文[1]知,存在$x=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}=1\in L$使得$z_i\equiv z_{i+1}(\theta_1)$或$z_i=z_{i+1}(\theta_2)$. 若$z_i\equiv z_{i+1}(\theta_1)$即$z_i\equiv z_{i+1}(\bigvee_{y\in F}\theta(y^{**},1))$,于是存在$z_i=t_0,t_1,\cdots,t_{m-1}=z_{t+1}\in L$使$t_j\equiv t_{j+1}(\theta(y_j^{**},1))\ (0\le j\le m-2)$,$y_j\in F\Rightarrow t_j\wedge y_j^{**}=t_{j+1}\wedge y_j^{**}\Rightarrow z_i\wedge y_0^{**}=t_0\wedge y_0^{**}=t_1\wedge y_0^{**}$,$t_1\wedge y_1^{**}=t_2\wedge y_1^{**}$,$t_2\wedge y_2^{**}=t_3\wedge y_2^{**}$,$\cdots$,$t_{m-2}\wedge y_{m-2}^{**}=t_{m-1}\wedge y_{m-2}^{**}=z_{i+1}\wedge y_{m-2}^{**}$.

$$t_0\wedge(y_0^{**}\wedge y_1^{**}\wedge\cdots\wedge y_{m-2}^{**})=t_1\wedge(y_0^{**}\wedge y_1^{**}\wedge\cdots\wedge y_{m-2}^{**})$$
$$=t_2\wedge(y_0^{**}\wedge y_1^{**}\wedge\cdots\wedge y_{m-2}^{**})=\cdots=z_{i+1}\wedge(y_0^{**}\wedge y_1^{**}\wedge\cdots\wedge y_{m-2}^{**}).$$

令$f_i=y_0\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_{m-2}$,因为$y_j\in F\ (0\le j\le m-2)$,所以$f_i\in F$且$f_i^{**}=(y_0\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_{m-2})^{**}=y_0^{**}\wedge y_1^{**}\wedge\cdots\wedge y_{m-2}^{**}$. 于是有$z_i\wedge f_i^{**}=z_{i+1}\wedge f_i^{**}$,$f_i\in F$. 由于$F$是滤子,$f_i\le f_i^{**}$,得$f_i^{**}\in F$. 若$z_i\equiv z_{i+1}(\theta_2)$即$z_i\equiv z_{i+1}(\bigvee_{y\in F}\theta(a_y,1))$(记$a_y=y\vee y^*$),则存在$z_i=s_0,s_1,\cdots,s_{m-1}=z_{i+1}\in L$使$s_j\equiv s_{j+1}(\theta(a_{y_j},1))$,$y_j\in F\ (0\le j\le m-2)\Rightarrow s_j\wedge a_{y_j}=s_{j+1}\wedge a_{y_j}$.

$$z_i\wedge a_{y_0}=s_0\wedge a_{y_0}=s_1\wedge a_{y_0},\quad s_1\wedge a_{y_1}=s_2\wedge a_{y_1},$$
$$s_2\wedge a_{y_2}=s_3\wedge a_{y_2},\cdots,s_{m-2}\wedge a_{y_{m-2}}=s_{m-1}\wedge a_{y_{m-2}}=z_{i+1}\wedge a_{y_{m-2}}.$$
$$z_i\wedge(a_{y_0}\wedge a_{y_1}\wedge\cdots\wedge a_{y_{m-2}})=s_1\wedge(a_{y_0}\wedge a_{y_1}\wedge\cdots\wedge a_{y_{m-2}})$$
$$=\cdots=z_{i+1}\wedge(a_{y_0}\wedge a_{y_1}\wedge\cdots\wedge a_{y_{m-2}})$$

令$e_i=a_{y_0}\wedge a_{y_1}\wedge\cdots\wedge a_{y_{m-2}}$,因为$a_{y_j}=y_i\vee y_j^*\in F$,所以$e_i\in F$且$z_i\wedge e_i=z_{i+1}\wedge e_i$. 由此得若$z_i\equiv$

$z_{i+1}(\theta_1)\Rightarrow z_i\wedge f_i^{**}=z_{i+1}\wedge f_i^{**}, f_i^{**}\in F$. 若 $z_i\equiv z_{i+1}(\theta_2)\Rightarrow z_i\wedge e_i=z_{i+1}\wedge e_i, e_i\in F$. 令 $t_i=e_i\wedge f_i^{**}$ 有 $z_i\wedge t_i=z_{i+1}\wedge t_i, 0\le i\le n-2$ 即

$$x\wedge t_0=z_0\wedge t_0=z_1\wedge t_0, z_1\wedge t_1=z_2\wedge t_1,\cdots,z_{n-2}\wedge t_{n-2}=z_{n-1}\wedge t_{n-2}=1\wedge t_{n-2}\Rightarrow$$
$$x\wedge(t_0\wedge t_1\wedge\cdots\wedge t_{n-2})=z_1\wedge(t_0\wedge t_1\wedge\cdots\wedge t_{n-2})=\cdots=1\wedge(t_0\wedge t_1\wedge\cdots\wedge t_{n-2}).$$

令 $t=t_0\wedge t_1\wedge\cdots\wedge t_{n-2}\in F$ 有

$$x\wedge t=1\wedge t=t\Rightarrow t\le x\Rightarrow x\in F\Rightarrow \mathrm{cok}\varphi_*\subseteq F.$$

反之, $\forall x\in F$, 因为 $x^{**}\equiv 1(\theta(x^{**},1))$, 而 $\theta(x^{**},1)\le\varphi_*\Rightarrow x^{**}\equiv 1(\varphi_*)$. 又 $x\vee x^*\equiv 1(\theta(x\vee x^*,1))$, $\theta(x\vee x^*,1)\le\varphi_*\Rightarrow x\vee x^*\equiv 1(\varphi_*)$, 所以 $x=x^{**}\wedge(x\vee x^*)\equiv 1\wedge 1(\varphi_*)=1(\varphi_*)\Rightarrow x\in\mathrm{cok}\varphi_*\Rightarrow F\subseteq\mathrm{cok}\varphi_*$. 故 $F=\mathrm{cok}\varphi_*$.

设 φ_*' 是以 F 为余核的任意 $*$-同余关系, 即 $F=\mathrm{cok}\varphi_*'$. 以下证明 $\varphi_*\le\varphi_*'$.

设 $x\equiv y(\varphi_*)$ (不妨设 $x\le y$). 则存在 $x=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}=y\in L$ 使 $z_i\equiv z_{i+1}(\theta_1)$ 或 $z_i\equiv z_{i+1}(\theta_2)$. 由前面的证明过程知 若 $z_i\equiv z_{i+1}(\theta_1)$ 则存在 $f_i\in F$ 使 $z_i\wedge f_i^{**}=z_{i+1}\wedge f_i^{**}$. 因为 $f_i\in F=\mathrm{cok}\varphi_*'$, 所以 $f_i\equiv 1(\varphi_*')\Rightarrow f_i^{**}\equiv 1(\varphi_*')\Rightarrow z_i=z_i\wedge 1\equiv z_i\wedge f_i^{**}(\varphi_*')=z_{i+1}\wedge f_i^{**}(\varphi_*')\equiv z_{i+1}(\varphi_*')$. 若 $z_i\equiv z_{i+1}(\theta_2)$, 则存在 $e_i\in F$, 使 $z_i\wedge e_i=z_{i+1}\wedge e_i$. 同理由 $e_i\in F=\mathrm{cok}\varphi_*'$ 知 $e_i\equiv 1(\varphi_*')\Rightarrow z_i=z_i\wedge 1\equiv z_i\wedge e_i(\varphi_*')=z_{i+1}\wedge e_i(\varphi_*')\equiv z_{i+1}(\varphi_*')$, 故 $\forall 0\le i\le n-2$ 有 $z_i\equiv z_{i+1}(\varphi_*')$ 即 $x=z_0\equiv z_1(\varphi_*')\equiv\cdots\equiv y(\varphi_*')$, 从而 $x\equiv y(\varphi_*)\Rightarrow\varphi_*\le\varphi_*'$. 故 $\theta_1\vee\theta_2=\varphi_*=\varphi_*(F)$.

定理 1 设 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$ 是分配 P-代数, J 是 L 的理想, 则 J 是 0-理想的充要条件是存在某个滤子 F, 使 $J=\{x\mid x\le t^*$ 对某个 $t\in F\}$.

证明 **必要性** 设 J 是 0-理想, 则存在某个滤子 F 使得 $J=\ker\varphi_*(F)$. 令 $M=\{x\mid x\le t^*$ 对某个 $t\in F\}$, $\forall x\in J=\ker\varphi_*(F)\Rightarrow x\equiv 0(\varphi_*(F))$. 由引理 2 的证明过程知存在 $t\in F$ 使 $0=0\wedge t=x\wedge t\Rightarrow x\le t^*\Rightarrow x\in M\Rightarrow J\subseteq M$. 反之, $\forall x\in M$, $\exists t\in F=\mathrm{cok}\varphi_*(F)$ 使 $x\le t^*\Rightarrow x\wedge t\le t\wedge t^*=0\Rightarrow x\wedge t=0$. 又 $t\in F\Rightarrow t\equiv 1(\varphi_*(F))$. 于是 $0=x\wedge t\equiv x\wedge 1(\varphi_*(F))=x(\varphi_*(F))\Rightarrow x\in\ker\varphi_*(F)=J\Rightarrow M\subseteq J$. 故 $J=M$.

充分性 设 $J=\{x\mid x\le t^*$ 对某个 $t\in F\}$. 以下证明 $J=\ker\varphi_*(F)$. 由此知 J 是 0-理想

$\forall x\in J$, 则存在 $t\in F$ 使得 $x\le t^*$, 因为 $t\in F$, 所以 $t\equiv 1(\varphi_*(F))\Rightarrow t^*\equiv 0(\varphi_*(F))$. 于是 $x=x\wedge t^*\equiv x\wedge 0(\varphi_*(F))=0(\varphi_*(F))\Rightarrow x\in\ker\varphi_*(F)\Rightarrow J\subseteq\ker\varphi_*(F)$. 反之, $\forall x\in\ker\varphi_*(F)$ 即 $x\equiv 0(\varphi_*(F))$. 由引理 2 知存在 $t\in F$ 使 $0=0\wedge t=x\wedge t\Rightarrow x\le t^*\Rightarrow x\in J\Rightarrow\ker\varphi_*(F)\subseteq J$. 故 $J=\ker\varphi_*(F)$.

定理 2 设 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$ 是分配 P-代数, P 是 L 的理想, 如果 P 相对于滤子 $F=L-P$ 是素的, 且 $P\cap D(L)=\varnothing$, 则 P 是 0-理想(其中 $D(L)=\{x\in L\mid x^*=0\}$.

证明 令 $M=\{x\mid x\le t^*$ 对某个 $t\in F=L-P\}$. 由定理 1 知只须证明 $P=M$ 即可. $\forall x\in P$ 则 $t=x^*\notin P$. 若不然 $t=x^*\in P\Rightarrow x\vee x^*\in P$, 又 $x\vee x^*\in D(L)$ 与 $P\cap D(L)=\varnothing$ 矛盾. 于是 $x\le x^{**}=t^*$, $t=x^*\in F=L-P\Rightarrow x\in M\Rightarrow P\subseteq M$. 反之, $\forall x\in M$, $\exists t\in F=L-P$ 使得 $x\le t^*$. 因为 $t\wedge t^*=0\in P$ 而 $t\in F$, 由条件 P 相对于 F 是素的知 $t^*\in P$, 又 $x\le t^*\Rightarrow x\in P\Rightarrow M\subseteq P$. 故 $P=M$.

定理 3 设 $(L;\wedge,\vee,*,0,1)$ 是分配 P-代数, I_1, I_2 是 L 的 0-理想, 则 $I_1\cap I_2$ 也是 0-

理想

证明 因为 $I_i(i=1,2)$ 是 0- 理想, 由定理 1 知, 存在滤子 $F_i(i=1,2)$ 使 $I_1=\{x \mid x\le t^*$ 对某个 $t\in F_1\}$, $I_2=\{x \mid x\le s^*$ 对某个 $s\in F_2\}$. 令 $F=F_1\cap F_2$. 显然 F 仍是滤子. 设 $M=\{x \mid x\le e^*$ 对某个 $e\in F=F_1\cap F_2\}$. 以下证明 $I_1\cap I_2=M$.

$\forall x\in I_1\cap I_2\Rightarrow x\in I_1$ 且 $x\in I_2\Rightarrow\exists\, t\in F_1, s\in F_2$ 使得 $x\le t^*$ 且 $x\le s^*$. 因为 $F_i(i=1,2)$ 是滤子, 所以 $t\vee s\in F_i(i=1,2)\Rightarrow t\vee s\in F_1\cap F_2=F$. $x\le t^*\wedge s^*=(t\vee s)^*\Rightarrow x\in M\Rightarrow I_1\cap I_2\subseteq M$. 反之, $\forall x\in M$, $\exists\, e\in F=F_1\cap F_2$ 使得 $x\le e^*$, 由 $e\in F_1$ 知 $x\in I_1$, 由 $e\in F_2$ 知 $x\in I_2$. 于是 $x\in I_1\cap I_2\Rightarrow M\subseteq I_1\cap I_2$. 故 $I_1\cap I_2=M$. 由定理 1 知 $I_1\cap I_2$ 是 0- 理想

定理 4 设 $(L;\wedge,\vee,{}^*,0,1)$ 是分配 P- 代数, $S(L)=\{x^* \mid x\in L\}$ 是 L 的骨架, 则当 $a\in S(L)$ 时, $I=(a]$ 是 0- 理想

证明 令 $F=[a^*)$, 则 F 是 L 的滤子. 设 $M=\{x \mid x\le t^*$ 对某个 $t\in F\}$. 以下证明 $I=M$.

$\forall x\in I=(a]\Rightarrow x\le a\Rightarrow x\le x^{**}\le a^{**}=t^*$, 其中 $t=a^*\in F\Rightarrow x\in M\Rightarrow I\subseteq M$. 反之, $\forall x\in M$, $\exists\, t\in F=[a^*)$ 使得 $x\le t^*$. 又 $a^*\le t\Rightarrow t^*\le a^{**}$. 由文[1]知, $a\in S(L)\Leftrightarrow a^{**}=a\Rightarrow x\le t^*\le a^{**}=a\Rightarrow x\in(a]=I\Rightarrow M\subseteq I$. 故 $I=M$. 由定理 1 知 I 是 0- 理想

此定理说明由 L 的骨架 $S(L)$ 中任意元 a 生成的主理想 $(a]$ 一定是 0- 理想

参 考 文 献

[1] Grätzer G. *General Lattice Theory* [M]. Akademie-Verlag, Berlin 1978.

[2] Lakser H. *Principal congruences of pseudocomplemented distributive lattice* [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1973, **37**(1): 32- 36.

[3] Lakser H. *The structure of pseudocomplemented distributive lattices* Ⅰ: *subdirect decomposition* [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1971, **156**(5): 335- 342.

0- Ideals in Distributive P-Algebra

Yang Yun

(Dept. of Math., Hubei Education College, Wuhan 430060)

Abstract

In this paper, we introduce a new notion of 0-ideals in distributive P-algebra and give a characterization of 0-ideals. This characterization is applied to get some other results.

Keywords distributive P-algebra, $*$-congruence relation, 0-ideal