第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

环形域上半线性椭圆方程正解的存在性*

钟 海 平

(吉首大学学报编辑部，湖南吉首 416000)

摘 要:本文利用连续性方法,得到了一类半线性椭圆方程第一边值问题在环形域上径向对称正解的存在性.

关键词:半线性椭圆方程; 环形区域; 连续性方法; 径向正解.

分类号:AMS(1991) 35J55/CLC O175.25

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)01-0067-04

1 问题的陈述

本文将用连续性方法讨论下列椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), x \in \Omega, \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{p}$$

第一边值问题径向对称正解的存在性.这里 $\Omega=\{x\in R^n: R_1<|x|<R_2\}$ 为环形区域.笔者的目的是寻找问题(p)的经向对称解 $u=u(r)$,此时问题(p)等价于下述常微分方程的两点边值问题,

$$\begin{cases} \dfrac{du^2}{dr_2}+\dfrac{n-1}{r}\dfrac{du}{dr}+f(u)=0, \\ u(R_1)=u(R_2)=0. \end{cases} \tag{p'}$$

文[1,2]讨论了 Ω 为环域时问题(p)的径向对称正解问题,文[3]对 Ω 为 R^n 中一般有界正规区域讨论了(p)的正解问题,本文笔者应用文[3]中不同的方法得到了问题(p)的径向对称正解的先验估计结果,从而利用拓扑不动点定理获得了径向对称正解的存在性.笔者的结果优于文[1]文[2]中相应结果,在环域情形下推广了文[3]中定理1.3之结论,它不同于一般区域或球形域上正解或非平凡解的存在性问题,这里无须对 $f(u)$ 的增长阶数作 $\delta<\frac{n+2}{n-2}$ 之假设,实际上这样一种限制对于球形域是必要的(见文[4]).由于环域为非球形域,去掉这一限制是有意义的.

---

* **收稿日期**:1996-04-16

作者简介:钟海平(1963-),男,白族,湖南桑植人,硕士,吉首大学副教授.

2 结论的证明

记 $\lambda_1>0$ 为 $(-\Delta)$ 在 Ω 上的第一特征值，对 $f(u)$ 作如下假定：

C_1) $\underline{\lim}\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}>\lambda_1$；

C_2) $\overline{\lim}\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}>\lambda_1, f(0)=0$；

C_3) $f\in C(R^+,R^+)$ 且满足局部 Lipschitz 条件

定理 1 设 $f(u)$ 满足 C_1)，C_3) 且 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 为(p)的径向对称解，则

$$\|u\|_\infty=\max_{R_1\leqslant r\leqslant R_2}u(r)\leqslant M,$$

其中 M 为仅与 R_1,R_2 及 C_1) 中 f 的极限有关的正常数.

证明 设 $u=u(r)\in C^2([R_1,R_2])$ 为(p)的径向对称正解，由文[3]中定理 1.3 的证明过程(取 $T_1=\{x:|x|=R_2\}, T_2=\{x,|x|=R_1\}$)知，存在仅与 Ω 及 f 的极限 $\underline{\lim}\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$ 有关的常数 $M_1\geqslant 0$，使得当 $x\in T_1$ 时 $|Du|=|u'(R_2)|\leqslant M_1$，设 $r_0\in(R_1,R_2)$ 使得 $u(r_0)=\max\limits_{R_1\leqslant r\leqslant R_2}u(r)$，则

$$u'(r_0)=0.$$

记 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$. 作函数 $G(r)=r^{2(n-2)}(\frac{u'(r)^2}{2}+F(u(r))\in C'([R_1,R_2])$，对 $G(r)$ 关于 r 求导：$G'(r)=2(n-1)r^{2n-3}F(u(r))\geqslant 0$，从而 $G(r)$ 关于 r 单调递增，故 $G(r_0)\leqslant G(R_2)$，即

$$r_0^{2n-2}F(u(r_0))\leqslant\frac{1}{2}R_2^{2n-2}u'(R_2)^2、=因而得到$$

$$F(u(r_0))\leqslant\frac{1}{2}(\frac{R_2}{R_1})^{2(n-1)}u'(R_2)^2\leqslant\frac{1}{2}(\frac{R_2}{R_1})^{2(n-1)}C_1{}^2\overset{\triangle}{=}M_2.$$

由于 $\underline{\lim}\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}>\lambda_1$，故 $\underline{\lim}\limits_{u\to\infty}F(u)=+\infty$，从而由上式得存在一个仅与 Ω 及 $\underline{\lim}\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$ 有关的常数 M 使得 $u(r_0)=\max\limits_{R_1\leqslant r\leqslant R_2}u(r)\leqslant M$ 成立.

引理 1[3] 设 K 为 Banach 空间 X 上的一个锥，且 $T:K\to K$ 为一紧映射，满足 $T(0)=0$，假设存在正数 $m<M$ 及一向量 $v\in K-\{0\}$ 使得：

i) $x\neq tT(x)$，任意的 $t\in[0,1]$ 及 $\|x\|=m$；

ii) $x\neq T(x)+tv$，任意的 $t\geqslant 0$ 及 $\|x\|=M$.

记 $U=\{x\in K:m<\|x\|<M\}$，$B_\rho=\{x\in K:\|x\|<\rho\}$. 则 $i_K(T,B_M)=0$，$i_K(T,B_m)=1$，$i_K(T,U)=-1$ 且 T 在 U 中有一个不动点. 若存在一有界线性算子 $A:X\to X$ 使得 $A(K)\subset K$，$r(A)<1$，且 $T(x)\leqslant A(x)$ 对任意 $x\in K$，$\|x\|=m$ 成立，则条件 i)成立. 条件 ii)可以换成 ii)′：存在一紧映射 $F:\overline{B}_M\times[0,\infty)\to K$ 使得 $F(x,0)=T(x)$ 对一切 $x\in K$，$\|x\|=M$ 成立，$F(x,t)\neq x$ 对一切 $t\geqslant 0$ 及 $\|x\|=M$ 成立，且存在 $t_0\geqslant$ 使得当 $t\geqslant t_0$ 时 $F(x,t)=t$ 在 $\overline{B}_M$ 中无解.

引理 2[3] 设 K 为 Banach 空间 X 上闭凸子集，U 为 K 中一有界相对开子集，$F:\overline{U}\times[a,b]\to K$ 为一紧映射. 当 $(x,t)\in(\overline{U}-U)\times[a,b]$ 时 $F(x,t)\neq x$，若定义 $F_t(x)=F(x,t)$，假设 $i_K(F_a,U)\neq 0$，记 $S=\{(x,t)\in U\times[a,b]:F(x,t)=x\}$，则存在 S 的一连通分量 D 使得 $D\cap(U\times\{a\})$ 及 $D\cap(U\times\{b\})$ 非空.

定理 2　设 f 满足 $C_1)\to C_3)$，则(p)至少存在一径向对称解 $u=u(r)$ 满足：

$$\begin{cases}-(r^{n-1}u')'=r^{n-1}f(u),r\in(R_1,R_2)\\ u(R_1)=u(R_2)=0,u\in C^2([R_1,R_2])\\ u(r)>0,\qquad r\in(R_1,R_2)\end{cases}\tag{g}$$

证明　令 C_r 表示 $\overline{\Omega}$ 上所有径向对称连续函数的集合，$C_{r,0}=\{u\in C_r,u(R_1)=u(R_2)=0\}$，记 L 为 $(-\Delta)$ 限制在 $C_{r,0}$ 上的逆算子，显然 $LC_r\subset C_{r,0}$，且 L 作为 C_r 到 C_r 的映射为紧映射，由椭圆方程之正则性及极大值原理知求解(p)的径向对称正解等价于求解方程 $u=L(f(u))\triangleq Tu$ 在 $K=\{u\in C_r:u(r)\geqslant 0,r\in(R_1,R_2)\}$ 中的非平凡解.

由 $C_2)$ 知，存在正常数 m 及 $a<\lambda_1$，使得当 $u\in[0,m]$ 时 $f(u)\leqslant au$，故算子 aL 的谱半径 $r(aL)<1$ 且 $Tu\leqslant aLu$，$\|u\|\leqslant m$，此时引理 1 中 i) 得的验证.

为验证引理 1 中 ii)′，定义 $F(u,t)=L(f(u+t))$，$F(u,0)=Tu$，由 $C_1)$ 知存在 $\lambda>\lambda_1$ 及 $t_0\geqslant 0$，当 $t\geqslant t_0$ 时 $f(t)>\lambda t$，可以断言 $u=F(u,t)$，当 $t\geqslant t_0$ 时在 $K-\{0\}$ 中无解. 事实上，由于 $u=F(u,t)$ 等价于

$$\begin{cases}-\Delta u=f(u+t),x\in\Omega,\\ \qquad u=0,x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{R}$$

若设 $u\in K-\{0\}$ 满足(R)，记 V_1 为 $(-\Delta)$ 相应于 λ_1 的正特征函数，则

$$\lambda_1\int_\Omega uv_1\mathrm{d}x=\int_\Omega(-\Delta x)v_1\mathrm{d}x=\int_\Omega v_1f(u+t)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_\Omega v_1(u+t)\mathrm{d}x,$$

这与 $\lambda>\lambda_1$ 矛盾，证毕.

对于(g)及一切 $t\geqslant 0$，它的正径向对称解的先验估计与 t 无关，因为定理 1 中的 M 与 Ω 及 $\varliminf\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}$ 有关. 从而存在 $M'>0$，使对一切 $t\geqslant 0$ 及 $\|u\|=M'$，有 $F(u,t)\neq u$，且由前述证明过程知对一切 $t\geqslant t_0$ 及 $u\in\overline{B}_{M'}$ 时有 $u\neq F(u,t)$. 故引理 1 中的 ii)′满足. 从而定理 2 证毕.

定理 3　设 $f:[\alpha,\beta]\times R_+\to R_t$ 连续且 $f(\lambda,0)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致的满足条件 $C_1)-C_3)$，则存在 $[\alpha,B]\times C([R_1,R_2])$ 中的一个闭连通子集 D 使得

a)　任意的 $\lambda\in[\alpha,\beta]$，存在 $u\in C([R_1,R_2])$ 使得 $(\lambda,u)\in D$；

b)　任意的 $(\alpha,u)\in D$，有

$$\begin{cases}u''+\dfrac{n-1}{r}u'+f(\lambda,u)=0,u(r)>0,r\in(R_1,R_2),\\ u(R_1)=u(R_2)=0,\quad u\in C^2([R_1,R_2]).\end{cases}$$

证明　定义 $F:K\times[\alpha,\beta]\to K$，$F(u,\lambda)=L(f(\lambda,u))$，由于 $f(\lambda,u)$ 满足 $C_1)$，$C_3)$ 且关于 $\lambda\in[\alpha,\beta]$ 为一致的，从而方程

$$\begin{cases}-\Delta u=f(u+t),x\in\Omega,\\ \qquad u=0,\qquad x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的径向对称正解有类似于定理 1 中的先验估计，且对于 $\lambda\in[\alpha,\beta]$ 是一致的，从而类似于定理 2 的证明可知存在 $m<M$，使得当 $\alpha\in[\alpha,\beta]$，$u\in K$ 且 $\|u\|=m$ 或 $\|u\|=M$ 时 $F(u,\lambda)\neq u$.

定义 $V=\{u\in K;m<\|u\|<M\}$，$F_\lambda(u)=F(u,\lambda)$，因为对任一固定的 λ 及 $f(\lambda,\cdot)$，定理 2 的证明验证了引理 1 中条件被满足，从而对每个固定的 $\lambda\in[\alpha,\beta]$ 均有 $i(F_\lambda,V)=-1$，因此由引理 2 可知该定理中的结论.

注　1）定理1、2去掉了文[3]中$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^{\frac{n+2}{n-2}}}=0$及$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{tf(t)-\theta F(t)}{t^2 f(t)^{\frac{2}{n}+1}}\leqslant 0,(\theta\in[0,\frac{2n}{n-2}])$的条件，因此在环形域上推广了文[3]中相关结论.

2）文[1,2]中也去掉了$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^{\frac{n+2}{n-2}}}=0$的条件，但在文[1]中要求$f(t)$非减，$f\in C'(R)$及更强的极限条件：$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\infty$，$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=0$，文[2]中要求$f(u)$关于$u$有多项式增长.

参考文献：

[1] BANDLE C, COFTMAN C V and MARCUS M. *Nonlinear elliptic problem in omnular domain* [J]. J. D. H. Eqs., 1987, **69**: 322—345.

[2] GARAIZAR X. *Existence of positive radial solution for semilinear elliptic equation in the annulas* [J]. J. D. H. Eqs., 1987, **70**: 69—92.

[3] DEPRIGUERIREDO D G, LIONS P L and NUSSBAUM R D. *A priori estimates and existence of positive solution of semilinear ellipotic equation* [J]. J. Math. Pure Appl., 1982, **61**: 41—63.

[4] POHOZAV S I. *Eigen-Punetion of $\Delta uf(u)=0$* [J]. Soviet math, Dokl., 1965, **6**: 1408—1411.

Existence of Positive Solution for Semilinear Elliptic Equation in Annular Domain

ZHONG Hai-ping

(Journal of Jishou University, Hunan Jishou 416000)

Abstract: In this paper, We use continuity method to ohtain existence of positive radial solution for the first boundary problems of elliptic equation in annular domain

Key words: semelinear elliptic equation; annular domain; continuity method; positive radial solution.