第20卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 1
2000年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2000

再谈 Alexander 的一个猜想*

张晗方
(徐州师范大学数学系，江苏 221009)

摘　要：本文首先给出了一个矩阵不等式，然后利用这个不等式将涉及度量和的 Alexander 的一个猜想作了实质性的推广，并给出了它的应用.

关键词：Hermite 矩阵；加权度量和；单形；体积.

分类号：AMS(1991) 51K05/CLC O184

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0084-05

1 引　言

设 $\mathscr{A}_1=\{A_1^{(1)},A_2^{(1)},\cdots,A_{n+1}^{(1)}\}$，$\mathscr{A}_2=\{A_1^{(2)},A_2^{(2)},\cdots,A_{n+1}^{(2)}\}$ 分别为 n 维欧氏空间 E^n 中两个单形 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 的顶点集，若存在点集 $\mathscr{A}_3=\{A_1^{(3)},A_2^{(3)},\cdots,A_{n+1}^{(3)}\}$ 使得

$$|A_i^{(3)}-A_j^{(3)}|^2=|A_i^{(1)}-A_j^{(1)}|^2+|A_i^{(2)}-A_j^{(2)}|^2, \tag{1}$$

则把 $\mathscr{A}_3$ 叫做 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 的度量和. 记为

$$\mathscr{A}_3=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2. \tag{2}$$

容易证明 $\mathscr{A}_3$ 也可以构成一个 n 维单形.

若设 $\mathscr{A}_i$ 的 n 维体积为 $V_i(1\leqslant i\leqslant 3)$，则 R. Alexander 曾猜想有如下的关系式[1]：

$$V_3^2\geqslant V_1^2+V_2^2. \tag{3}$$

对于(3)，文[2]已经否定了它，并且给出其相应的正确结论：

$$V_3^{\frac{2}{n}}\geqslant V_1^{\frac{2}{n}}+V_2^{\frac{2}{n}}, \tag{4}$$

当且仅当三个单形两两相似时等号成立.

作者曾在文[3]中将(4)推广为涉及任意 $m(\geqslant 2)$ 个单形的加权形式，即本文中的(24)，本文主要是将(4)再作进一步的推广，为此需要如下的

2 一个矩阵不等式

将方阵 A 分块为

---

* 收稿日期：1997-03-12
作者简介：张晗方(1955-)，男，江苏省东海县人，徐州师范大学副教授.

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

当 A_{11} 可逆时，称方阵 $A_{22.1}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 为 A_{11} 在 A 中的 Schur 补矩阵，简称 Schur 补，也常记为 $A_{22.1}=(A/A_{11})$.

显然，当 A_{11} 为零阶时，$(A/A_{11})=A$.

关于 Schur 补，有如下的结论成立.

引理[4] 设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

皆为 n 阶 Hermite 矩阵，其中 A_{11} 和 B_{11} 为 $k(0\leqslant k<n)$ 阶方阵，若 $A\geqslant 0, B\geqslant 0, A_{11}>0, B_{11}>0$，则

$$\big((A+B)/(A_{11}+B_{11})\big)\geqslant (A/A_{11})+(B/B_{11}) \tag{5}$$

当且仅当 A 与 B 相似时等号成立.

定理 1 设 A,B 为 n 阶正定 Hermite 矩阵，A_{11} 与 B_{11} 分别为 A 和 B 中左上角的 $k(0\leqslant k<n)$ 阶严格正定矩阵，λ,μ 为任二正实数，则有

$$\left(\frac{|\lambda A+\mu B|}{|\lambda A_{11}+\mu B_{11}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}\geqslant \lambda\cdot\left(\frac{|A|}{|A_{11}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}+\mu\cdot\left(\frac{|B|}{|B_{11}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}, \tag{6}$$

当且仅当 A 与 B 相似时等号成立.

证明 若设 P,Q 均为 n 阶正定 Hermite 矩阵，则有著名的 Minkowski 不等式[4]

$$|P+Q|^{\frac{1}{n}}\geqslant |P|^{\frac{1}{n}}+|Q|^{\frac{1}{n}}, \tag{7}$$

当且仅当 P 与 Q 相似时等号成立.

由于 A_{11} 与 B_{11} 均为 k 阶矩阵，故 (A/A_{11})，(B/B_{11}) 以及 $\big((A+B)/(A_{11}+B_{11})\big)$ 均为 $n-k$ 阶矩阵，且

$$|((A+B)/(A_{11}+B_{11}))|=\frac{|A+B|}{|A_{11}+B_{11}|};$$

$$|(A/A_{11})|=\frac{|A|}{|A_{11}|};\qquad |(B/B_{11})|=\frac{|B|}{|B_{11}|},$$

从而由(5)和(7)可得

$$\begin{aligned}|((\lambda A+\mu B)/(\lambda A_{11}+\mu B_{11}))|^{\frac{1}{n-k}}&\geqslant |(\lambda A/\lambda A_{11})+(\mu B/\mu B_{11})|^{\frac{1}{n-k}}\\ &\geqslant |(\lambda A/\lambda A_{11})|^{\frac{1}{n-k}}+|(\mu B/\mu B_{11})|^{\frac{1}{n-k}}\\ &=\lambda\cdot|(A/A_{11})|^{\frac{1}{n-k}}+\mu|(B/B_{11})|^{\frac{1}{n-k}},\end{aligned}$$

即

$$\left(\frac{|\lambda A+\mu B|}{|\lambda A_{11}+\mu B_{11}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}\geqslant \lambda\cdot\left(\frac{|A|}{|A_{11}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}+\mu\cdot\left(\frac{|B|}{|B_{11}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

至于等号成立的充要条件由(5)与(7)中等号成立的充要条件是不难看出的. 证毕.

由(6)，利用数学归纳法容易证得如下的：

推论 1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均为 n 阶正定 Hermite 矩阵，$A_{i(11)}$ 为 A_i 的左上角 $k(0\leqslant k<n)$

阶子矩阵,且 $A_{i(11)}>0(1\leqslant i\leqslant m)$,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为一组正实数,则有

$$\left[\frac{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i A_i\right|}{\left|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i A_{i(11)}\right|}\right]^{\frac{1}{n-k}}\geqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot\left(\frac{|A_i|}{|A_{i(11)}|}\right)^{\frac{1}{n-k}}. \tag{8}$$

当且仅当 m 个矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中两两相似时等号成立.

3　一个加权度量和不等式

设 $\mathscr{A}_l=\{A_1^{(l)},A_2^{(l)},\cdots,A_N^{(l)}\}(1\leqslant l\leqslant m)$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的点集,对于任意正实数 λ_l $(1\leqslant l\leqslant m)$,如果存在点集 $\mathscr{A}_{m+1}=\{A_1^{(m+1)},A_2^{(m+1)},\cdots,A_N^{(m+1)}\}$ 使得

$$|A_i^{(m+1)}-A_j^{(m+1)}|^2=\sum_{l=1}^{m}\lambda_l|A_i^{(l)}-A_j^{(l)}|^2. \tag{9}$$

则把 $\mathscr{A}_{m+1}$ 叫做 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 的加权度量和,记为

$$\mathscr{A}_{m+1}=\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\mathscr{A}_l. \tag{10}$$

特别地,在(10)中当 $\lambda_l=\frac{1}{m}(1\leqslant l\leqslant m)$ 时,便把 $\mathscr{A}_{m+1}$ 叫做 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 的度量平均.

关于加权变量和,有如下的结论.

定理 2　设 $\mathscr{A}_l$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的单形,其顶点集为 $\{A_1^{(l)},A_2^{(l)},\cdots,A_{n+1}^{(l)}\}$,由 $k+1$ 个顶点 $A_{i_0}^{(l)},A_{i_1}^{(l)},\cdots,A_{i_k}^{(l)}$ 所构成的子单形 $\mathscr{A}_{l(k)}$ 的 k 维体积为 $v_{l,i(k)}$,若 $\mathscr{A}_{m+1}$ 为 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 关于正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 的加权度量和,且 $\mathscr{A}_l$ 的 n 维体积为 $V_l(1\leqslant l\leqslant m+1)$,则有

$$\left(\frac{V_{m+1}}{v_{m+1,i(k)}}\right)^{\frac{2}{n-k}}\geqslant\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\left(\frac{V_l}{v_{l,i(k)}}\right)^{\frac{2}{n-k}},\quad(0\leqslant k<n), \tag{11}$$

当且仅当 m 个单形 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 中两两相似时等号成立.

证明　设 $\mathscr{A}$ 为 E^n 空间中的单形,其顶点集为 $\{A_0,A_1,\cdots,A_n\}$,顶点 A_i 与 A_j 之间的距离为 a_{ij},若记 $\rho_{ij}=a_{io}^2+a_{oj}^2-a_{ij}^2,(0\leqslant i,j\leqslant n)$,则矩阵 $A=(\rho_{ij})_{n\times n}$ 是正定 Hermite 矩阵,并且,若 $\mathscr{A}$ 的 n 维体积为 V,则容易得到:

$$|A|=2^n\cdot n!^2\cdot V^2. \tag{*}$$

由(*)知,对于单形 $\mathscr{A}_l$ 所对应的矩阵 A_l 以及 $A_{l(11)}$ 同样有

$$|A_l|=2^n\cdot n!^2\cdot V_l^2;\quad |A_{l(11)}|=2^k\cdot k!^2\cdot v_{l,i(k)}^2,$$

其中 $1\leqslant l\leqslant m+1;0\leqslant k<n;1\leqslant i\leqslant C_{n+1}^{k+1}$($C_{n+1}^{k+1}$ 为组合数),将以上二式代入(8)内经整理便得(11),至于等号成立的充要条件,由(8)知为矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中两两相似,而且这个条件又恰好等价于单形 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 中两两相似. 证毕.

由(11),利用 Hölder 不等式极易得到:

推论 2　条件与定理 2 中的相同,则有

$$\left[\frac{V_{m+1}}{\left(\prod_{i=1}^{C_{n+1}^{k+1}}v_{m+1,i(k)}\right)^{\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}}}\right]^{\frac{2}{n-k}}\geqslant\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\left[\frac{V_l}{\left(\prod_{i=1}^{C_{n+1}^{k+1}}v_{l,i(k)}\right)^{\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}}}\right]^{\frac{2}{n-k}}. \tag{12}$$

当且仅当 m 个单形 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 中两两相似时等号成立.

推论 3 设 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m,\mathscr{A}$ 均为 E^n 空间中的单形，若 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 的度量平均，且 $\mathscr{A}_l$，与 $\mathscr{A}$ 的 n 维体积分别为 V_l 和 V $(1\leqslant l\leqslant m)$，则有

$$V^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \frac{1}{m}\cdot\sum_{l=1}^{m}V_l^{\frac{1}{n-1}}. \tag{13}$$

当且仅当 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$ 均为正则时等号成立.

证明 设 $|A_i^{(l)}-A_j^{(l)}|=a_{l,ij}(1\leqslant l\leqslant m)$. $|A_i-A_j|=a_{ij}$. 则有 $a_{ij}^2=\frac{1}{m}\cdot\sum\limits_{l=1}^{m}a_{l,ij}^2$，故在(11)中取 $k=1$ 时便有

$$\left(\frac{V^2}{\frac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m}a_{l,ij}^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \frac{1}{m}\cdot\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{V_l^2}{a_{l,ij}^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{1}{m}\cdot\sum_{l=1}^{m}\frac{\left(V_l^{\frac{1}{n-1}}\right)^2}{\left(a_{l,ij}^2\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\geqslant \frac{1}{m}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{l=1}^{m}V_l^{\frac{1}{n-1}}\right)^2}{\sum\limits_{l=1}^{m}(a_{l,ij}^2)^{\frac{1}{n-1}}}=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{l=1}^{m}V_l^{\frac{1}{n-1}}\right)^2}{\frac{1}{m}\cdot\sum\limits_{l=1}^{m}(a_{l,ij}^2)^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\geqslant \frac{1}{m^2}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{l=1}^{m}V_l^{\frac{1}{n-1}}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m}a_{l,ij}^2\right)^{\frac{1}{n-1}}},$$

即

$$V^{\frac{2}{n-1}} \geqslant \frac{1}{m^2}\cdot\left(\sum_{l=1}^{m}V_l^{\frac{1}{n-1}}\right)^2.$$

将此不等式的两端开平方便得(13)，至于等号成立的充要条件由(11)及上述证明过程是不难看出的. □

推论 4 设 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_m$，以及 $\mathscr{A}$ 均为 E^n 空间中的单形，$\lambda_l(1\leqslant l\leqslant m)$ 为正实数，且 $\mathscr{A}=\sum\limits_{l=1}^{m}\lambda_l\mathscr{A}_l$，若 $\mathscr{A}_l$ 的内切球半径为 $r_l(1\leqslant l\leqslant m)$，$\mathscr{A}$ 的内切球半径为 r，则有

$$r^2 \geqslant \sum_{l=1}^{m}\lambda_l r_l^2, \tag{14}$$

当且仅当所有的单形均匀为正则时等号成立.

证明 利用单形的体积公式[5] $V=\frac{1}{n}Sh$ 可得：

$$V=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}S_i\right)\cdot r, \tag{15}$$

其中 S_i 为单形 $\mathscr{A}$ 的顶点 $A_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$ 所对的界面的 $n-1$ 维体积.

在(11)中取 $k=n-1$，则有

$$\frac{V_{m+1}^2}{S_{m+1,i}^2} \geqslant \sum_{l=1}^{m}\lambda_l\cdot\frac{V_l^2}{S_{l,i}^2}.$$

在此不等式的两端同乘以 $S_{m+1,i}^3$，并对 i 求和可得

$$V_{m+1}^2\left(\sum_{i=1}^{n+1} S_{m+1,i}\right) \geqslant \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot V_l^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{S_{m+1,i}^3}{S_{l,i}^2}\right) \geqslant \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot V_l^2 \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1} S_{m+1,i}\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n+1} S_{l,i}\right)^2},$$

即

$$\left(\frac{V_{m+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} S_{m+1,i}}\right)^2 \geqslant \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot \left(\frac{V_l}{\sum_{i=1}^{n+1} S_{m+1,i}}\right)^2.$$

由此不等式利用(15)便得(14)，至于等号成立情况由上述证明是不难看出的. □

在(11)中当 $k=0$ 时，有

$$V_{m+1}^{\frac{2}{n}} \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_l \cdot V_l^{\frac{2}{n}}, \tag{16}$$

当且仅当 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_m$ 均相似时等号成立.

(16)就是引言中所提的文[3]中的结论，又在(16)中当 $m=2, \lambda_1=\lambda_2=1$ 时便为(4)，故本文中的(11)确实是 Alexander 的一个猜想(3)的实质性推广.

参考文献:

[1] ALEXANDER R. *The Geometry of Metric and Liner Space* [M]. Springer-Verlag, 1975, 57—65.

[2] 杨路,张景中. 关于 Alexander 的一个猜想 [J]. 科学通报, 1982, **27**(1): 1—3.

[3] 刘根洪,张晗方. 有限个单形间的几个不等式 [J]. 苏州大学学报, 1988, **4**(1): 122—126.

[4] 王松桂,贾忠贞. 矩阵论中的不等式 [M]. 安徽:安徽教育出版社, 1994, 72—80.

[5] 张晗方. 单形中的一类不等式 [J]. 数学的实践与认识, 1984, **3**: 39—48.

A Note on the Alexander Conjeture

ZHANG Han-fang

(Dept. of Math., Xuzhou Normal Univ., Jiangsu 221009)

Abstract: In this paper, we first establish a matrix inequality, then give essential generalization and applications on metric addition Alexander conjecture by one.

Key words: Hermite matrix; weighted metric addition; simplex; volume.