用Legendre-Fourier级数的部分和逼近ω-型单调函数*

俞国华
(宁波大学数学系，浙江 315211)

摘 要:本文给出 Legendre-Fourier 级数和共轭 Legendre-Fourier 级数的部分和点态逼近 ω-型单调连续函数的速度.

关键词:Legendre-Fourier 级数；共轭 Legendre-Fourier 级数；部分和；点态逼近；ω-型单调函数.

分类号:AMS(1991) 42A20/CLC O174

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)01-0097-06

1 引言

设 $P_n(x)$是$[-1,1]$上 n 阶 Legendre 正交多项式,$P_n(1)=1$,$f\in L[-1,1]$. $f(x)$的 Legendre-Fourier(简称 L-F)级数展开式为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)P_n(x). \tag{1.1}$$

其中 $a_n(f)=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$. 设 $Q_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)}{z-t}\mathrm{d}t$, $z\overline{\in}[-1,1]$是第二类 Legendre 多项式,记

$$R_n(x)=-\frac{1}{\pi}[Q_n(x+i0)+Q_n(x-i0)].$$

定义[2] f 的共轭 L-F 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)R_n(x). \tag{1.2}$$

L-F 级数和共轭 L-F 级数的前 $n+1$ 项部分和分别为

$$S_n^{(L)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)P_k(x) \tag{1.3}$$

和

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)R_k(x). \tag{1.4}$$

再记

$$\widetilde{f}^{(L)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{x-t}\mathrm{d}t\ (\text{p.v}),$$

* 收稿日期:1996-11-27
作者简介:俞国华(1954-),男,浙江宁波人,宁波大学副教授.

$$\widetilde{f}^{(L)}(x,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{(-1,1)-(x-\eta,x+\eta)}\frac{f(t)}{x-t}\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

在[4]中，拓广了单调型函数的概念，提出了 ω-型单调函数，研究了用 Fourier 级数和共轭 Fourier 级数对 ω-型单调函数的逼近问题. 本文要研究用 L-F 级数和共轭 L-F 级数对 ω-型单调函数的点态逼近问题.

为了方便和完整起见，重述 ω-型单调函数概念如下：

定义[4] 设 I 是区间(或开或闭或半开半闭)，f 在 I 上有定义，$\omega(t)$是一个给定的连续模，$\mathrm{sgn}x$ 是符号函数. 若存在一个常数 C，使得

$$F(x)=f(x)+C\omega\cdot(|x|)\mathrm{sgn}x \tag{1.6}$$

是 I 上的单调函数，则称 f 为 I 上的 ω-型单调函数. 特别，若 $\omega(t)=t^{\alpha}(0<\alpha<1)$，则称 f 为 α-型单调函数. 一般地，若

$$F(x)=f(x)+C\omega(|x-\tau|)\mathrm{sgn}(x-\tau) \tag{1.7}$$

是 I 上的单调函数，其中 τ 为 I 中的某个定点，则称 f 为 I 上以 τ 为定点的 ω-型单调函数.

2 定理及其证明

主要结果如下：

定理 1 若 $f\in C[-1,1]$，且是$[-1,1]$上的 ω-型单调函数，那么对于 $n\geqslant 2$，有

(i) $$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\left[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})\right]; \tag{2.1}$$

(ii) 对于满足 $|x|<\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ 的 $x\in(-1,1)$，

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}\left[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})\right], \tag{2.2}$$

这里 $\omega(f,t)$为函数 f 的连续模，$\rho_n(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}$.

为了证明定理 1，需要下列两个引理：

引理 1[1] 若 $f\in BV[-1,1]$，那么在$[-1,1]$上对于 $n\geqslant 2$ 有

$$\begin{aligned}&S_n^{(L)}(f,x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\\&=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-(1+x)/k}^{x+(1-x)/k}(g_x)+\\&\quad O(n^{-1})\rho_n(x)^{-1}|f(x+0)-f(x-0)|.\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $f(-1-0)=f(-1)$，$f(1+0)=f(1)$，$\bigvee_a^b(g)$是函数 g 在$[a,b]$上的全变差.

$$g_x(t)=\begin{cases}f(t)-f(x-0), & -1\leqslant t<x,\\ 0, & t=x,\\ f(t)-f(x+0), & x<t\leqslant 1.\end{cases}$$

引理 2[3] 若 $f\in BV[-1,1]$，那么对于满足 $|x|<\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ 的 $x\in(-1,1)$，当 $n\geqslant 2$ 时有

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x,\eta_n)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-(1+x)/k}^{x+(1-x)/k}(g_x)+$$

$$[f(x+0)-f(x-0)]\cdot[\frac{1}{\pi}C_n+\frac{1}{2\pi}|\ln\frac{1-x}{1+x}|-\frac{1}{2}R_{n+1}(x)P_n(x)], \tag{2.4}$$

这里 C_n 是 Eular 常数，$\eta_n=\min\{\frac{1-x}{n},\frac{1+x}{n}\}$.

定理 1 的证明 设 x 是$[-1,1]$上任意取定的一点，又设 $x-\frac{1+x}{k}=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=x+\frac{1-x}{k}$是$[x-\frac{1+x}{k},x+\frac{1-x}{k}]$上任意一个划分. 由于 f 是$[-1,1]$上的 ω-型单调函数，则存在常数 C，使得 $F(x)=f(x)+c\omega(|x|)\mathrm{sgn}x$ 是$[-1,1]$上的单调函数，不妨认为 F 是单调递增.

若 $t_0t_m<0$，则不妨假定分点 $t_{m_0}=0$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}|g_x(t_j)-g_x(t_{j-1})|&=\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|\\&=\sum_{j=1}^{m_0}|f(t_j)-f(t_{j-1})|+\sum_{j=m_0+1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|.\end{aligned}$$

由 F 的单调递增性

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m_0}|f(t_j)-f(t_{j-1})|\leqslant&\sum_{j=1}^{m_0}|f(t_j)+C\omega(|t_j|)\mathrm{sgn}t_j-f(t_{j-1})-C\omega(|t_{j-1}|)\mathrm{sgn}t_{j-1}|+\\&\sum_{j=1}^{m_0}|-C\omega(|t_j|)\mathrm{sgn}t_j+C\omega(|t_{j-1}|)\mathrm{sgn}t_{j-1}|\\=&\sum_{j=1}^{m_0}[f(t_j)-f(t_{j-1})]+C\sum_{j=1}^{m_0}[\omega(|t_{j-1}|)-\omega(|t_j|)]+\\&|C|\sum_{j=1}^{m_0}|\omega(|t_j|)-\omega(|t_{j-1}|)|=-f(t_0)+(C+|C|)\omega(|t_0|).\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}&\sum_{j=m_0+1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|\\&\leqslant\sum_{j=m_0+1}^{m}|f(t_j)+C\omega(t_j)-f(t_{j-1})-C\omega(t_{j-1})|+\sum_{j=m_0+1}^{m}|-C\omega(t_j)+C\omega(t_{j-1})|\\&=f(t_m)+(C+|C|)\omega(t_m).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{j=1}^{m}|g_x(t_j)-g_x(t_{j-1})|\leqslant f(t_m)-f(t_0)+2|C|[\omega(|t_0|)+\omega(t_m)].$$

由于 $f(t_m)-f(t_0)\leqslant\omega(f,\frac{2}{k})$及 $\omega(|t_0|)+\omega(t_m)\leqslant 2\omega(|t_0|+t_m)$，得

$$\sum_{j=1}^{m}|g_x(t_j)-g_x(t_{j-1})|\leqslant\omega(f,\frac{2}{k})+4|C|\omega(\frac{2}{k}).$$

若 $t_0t_m\geqslant 0$，不妨认为 $t_0\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}|g_x(t_j)-g_x(t_{j-1})|=\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)+C\omega(t_j)-f(t_{j-1})-C\omega(t_{j-1})|+\sum_{j=1}^{m}|C\omega(t_j)-C\omega(t_{j-1})|\end{aligned}$$

$$=f(t_m)-f(t_0)+(C+|C|)[\omega(t_m)-\omega(t_0)]\leqslant\omega(f,\frac{2}{k})+2|C|\omega(\frac{2}{k}).$$

总之,任意 $x\in[-1,1]$,恒成立

$$\sum_{j=1}^{m}|g(t_j)-g(t_{j-1})|\leqslant 2\omega(f,\frac{1}{k})+8|C|\omega(\frac{1}{k}).$$

因此

$$\bigvee_{x-(1+x)/k}^{x+(1-x)/k}(g_x)\leqslant 2\omega(f,\frac{1}{k})+8|C|\omega(\frac{1}{k}).\qquad(2.5)$$

于是,根据引理 1 并注意到 f 的连续性,即得

$$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})].$$

类似地利用引理 2,那么对于满足 $|x|<\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ 的 $x\in(-1,1)$,当 $n\geqslant 2$ 时有

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x,\eta_n)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-\frac{3}{2}}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})].\qquad(2.6)$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可选 n,使得 $\frac{n\eta_n}{n+1}<\varepsilon\leqslant\frac{\eta_n}{n}$. 于是,根据(1.5)

$$\begin{aligned}
&|\widetilde{f}^{(L)}(x,\eta_n)-\widetilde{f}^{(L)}(x,\varepsilon)|\\
&=|\frac{1}{\pi}\int_{(-1,1)-(x-\eta_n,x+\eta_n)}\frac{f(t)}{x-t}dt-\frac{1}{\pi}\int_{(-1,1)-(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}\frac{f(t)}{x-t}dt|\\
&\leqslant|\frac{1}{\pi}\{\int_{-1}^{x-\eta_n}-\int_{-1}^{x-\varepsilon}\}\frac{g_x(t)}{x-t}dt+\frac{1}{\pi}\{\int_{x+\eta_n}^{1}-\int_{x+\varepsilon}^{1}\}\frac{g_x(t)}{x-t}dt|+\\
&\quad|\frac{1}{\pi}f(x-0)\int_{x-\varepsilon}^{x-\eta_n}\frac{dt}{x-t}+\frac{1}{\pi}f(x+0)\int_{x+\eta_n}^{x+\varepsilon}\frac{dt}{x-t}|\\
&=|\frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{x+\eta_n}\frac{g_x(t)}{x-t}dt-\frac{1}{\pi}\int_{x-\eta_n}^{x-\varepsilon}\frac{g_x(t)}{x-t}dt|+\\
&\quad|\frac{1}{\pi}f(x+0)\int_{x+\varepsilon}^{x+\eta_n}\frac{dt}{t-x}-\frac{1}{\pi}f(x-0)\int_{x-\eta_n}^{x-\varepsilon}\frac{dt}{x-t}|.
\end{aligned}$$

记上述和的第一项为 A_n,第二项为 B_n,则

$$\begin{aligned}
A_n&=\frac{1}{\pi}|\int_{\varepsilon}^{\eta_n}\frac{g_x(x+t)}{t}dt+\int_{\eta_n}^{\varepsilon}\frac{g_x(x-t)}{t}dt|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\eta_n}\frac{\omega(f,t)}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\eta_n}\frac{\omega(f,t)}{t}dt|\\
&\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{n\eta_n/(n+1)}^{\eta_n}\frac{\omega(f,t)}{t}dt\leqslant\frac{4}{\pi}\frac{n+1}{n\eta_n}\omega(f,\frac{n\eta_n}{n+1})(\eta_n-\frac{n\eta_n}{n+1})\\
&\leqslant\frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\omega(f,\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}),
\end{aligned}\qquad(2.7)$$

$$\begin{aligned}
B_n&=\frac{1}{\pi}|f(x+0)\int_{x+\varepsilon}^{x+\eta_n}\frac{dt}{t-x}-f(x-0)\int_{x-\eta_n}^{x-\varepsilon}\frac{dt}{x-t}|\\
&=\frac{1}{\pi}|f(x+0)-f(x-0)|\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{\pi}|f(x+0)-f(x-0)|\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

因为 $f\in C[-1,1]$,所以

$$B_n=0.\qquad(2.8)$$

由(2.7)和(2.8),则得

$$|\widetilde{f}^{(L)}(x,\eta_n)-\widetilde{f}^{(L)}(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{4}{\pi}n^{-1}\omega(f,\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}). \tag{2.9}$$

结合(2.6)和(2.9),即有

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-1}\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})].$$

至此,定理1的证明完成.

同样可以证明

定理2 若$f\in C[-1,1]$,且是$[-1,1]$上以τ为零点的ω-型单调函数,那么对于$n\geqslant 2$,有

(i) $S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})]$;

(ii) 对于满足$|x|<\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$的$x\in(-1,1)$,

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\omega(\frac{1}{k})].$$

3 推论

由定理1和定理2,可以得到下面几个很重要的推论.

推论1 若$f\in C[-1,1]$,且是$[-1,1]$上的单调型函数,则

$$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\frac{1}{k}), \tag{3.1}$$

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\frac{1}{k}). \tag{3.2}$$

推论2 若$f\in C[-1,1]$,且是$[-1,1]$上的α-型(或以τ为零点的α-型)单调函数,则

$$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\frac{1}{k^\alpha}], \tag{3.3}$$

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}[\omega(f,\frac{1}{k})+\frac{1}{k^\alpha}]. \tag{3.4}$$

由推论2即可得

推论3 若$f\in \mathrm{Lip}\alpha(0<\alpha<1)$,且是$[-1,1]$上的$\alpha$-型(或以$\tau$为零点的$\alpha$-型)单调函数,则

$$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-\alpha})\rho_n(x)^{-2}, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-\alpha})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|). \tag{3.6}$$

推论4 若$f\in C[-1,1]$,且是$[-1,1]$上的$\omega(f,t)$-型单调函数,则

$$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\frac{1}{k}), \tag{3.7}$$

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\frac{1}{k}). \tag{3.8}$$

注1 这里,给定的那个连续模$\omega(t)$取了由函数f产生的连续模$\omega(f,t)$.

注 2 推论 3 也可从推论 4 推得.

推论 5 若 $f\in C[-1,1]$,且是$[-1,1]$上的 ω-型单调函数,其中 $\omega(t)$是由 $\omega(f,t)$如此产生:$\omega(t)=t\int_t^1\frac{\omega(f,u)}{u^2}\mathrm{d}u+(1+t)\int_0^t\frac{\omega(f,u)}{u}\mathrm{d}u$,那么

$$S_n^{(L)}(f,x)-f(x)$$
$$=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\left[\omega(f,\frac{1}{k})+\frac{1}{k}\int_{1/k}^1\frac{\omega(f,u)}{u^2}\mathrm{d}u+(1+\frac{1}{k})\int_0^{1/k}\frac{\omega(f,u)}{u}\mathrm{d}u\right],\qquad(3.9)$$

$$\widetilde{S}_n^{(L)}(f,x)-\widetilde{f}^{(L)}(x)$$
$$=O(n^{-1})\rho_n(x)^{-3/2}(1+|\ln\frac{1-x}{1+x}|)\sum_{k=1}^{n}\left[\omega(f,\frac{1}{k})+\frac{1}{k}\int_{1/k}^1\frac{\omega(f,u)}{u^2}\mathrm{d}u+\right.$$
$$\left.(1+\frac{1}{k})\int_0^{1/k}\frac{\omega(f,u)}{u}\mathrm{d}u\right].\qquad(3.10)$$

注 3 推论 3 也可以从推论 5 得出.

参考文献:

[1] 俞国华. Legendre-Fourier 级数部分和对有界变差函数的逼近 [J]. 杭州大学学报(自然科学版), 1995, **22**(3): 215—221.

[2] Zhang Peixuan. *On conjugate Fourier-Legendre series* [J]. J. of Math. Research and Exposition, 1993, **13**(3): 365—371.

[3] Yu Guohua. *On the rate of convergence of conjugate Fourier-Legendre series of functions of bounded-variation* [J]. A.T.A. (in press).

[4] Yu Guohua. *Approximation by the partial sums of Fourier series*. to appear.

[5] Salem R and Zygmund A. *The approximation by partial sums of Fourier series* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**: 14—22.

Approximation of the Partial Sums of Legendre-Fourier Series for ω-Type Monotonic Function

YU Guo-hua

(Dept. of Math., Ningbo University, 315211)

Abstract: In this paper, we gave the rate of pointwise approximation of the partial sums of Legendre-Fourier series and conjugate Legendre-Fourier series for ω-type monotonic function.

Keywords: L-F series; conjugate L-F series; partial sums; pointwise approximation; ω-type monotonic function.