Noether 环上加性秩函数对应的Gabriel 拓扑与相应商环的构造*

李劲松
(复旦大学数学研究所，上海 200433)

摘　要：本文利用[1]中建立的关系，给出了半素右 Noether 环上所有加性秩函数对应的 Gabriel 拓扑与相应商环的构造，并建立了一般 Noether 环上加性秩函数与 Artin 环上模范畴中的有限长之间的联系.

关键词：Noether 环；加性秩函数；Gabriel 拓扑；商环.
分类号：AMS(1991) 16P40, 16P50, 16S90/CLC O153.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0119-05

G. krause 在[1]中建立了 Noether 环 R 上加性秩函数本质上与使 R 满足 F-closed 右理想降链条件的 R 上的 Gabriel 拓扑 F 之间的一一对应. R 上加性秩函数 λ 对应的 Gabriel 拓扑 $\mathrm{d}(\lambda)=\{A\leqslant R_R\,|\,\lambda(R/A)=0\}$，本文探讨了它的构造. 由[2]知，Noether 环上加性秩函数与半素 Noether 环上原子秩函数有着十分密切的联系，本文解决了半素 Noether 环上原子秩函数对应的 Gabriel 拓扑与相应商环的构造问题. 对 R 上任一加性秩函数 λ，设 $\lambda=\sum\limits_{P\in\text{min-spec}(R)}K_P\rho_P$，则 $\mathrm{d}(\lambda)=\bigcap\limits_{K_P\neq 0}\mathrm{d}(\rho_P)$[1]，从而由 $\mathrm{d}(\rho_P)$ 及相应商环的构造即决定了半素 Noether 环R上所有加性秩函数对应的 Gabriel 拓扑及相应商环的构造，并由此建立了一般 Noether 环上加性秩函数与某一 Artin 环上模范畴中的有限长之间的联系，试图揭示一般加性秩函数与常用加性秩函数(Goldie rank，有限长)的内在联系.

本文的定义与符号均同[1]及[3].

设 λ 为右 Noether 环 R 上的加性秩函数，则 λ 对应的环 R 上的 Gabriel 拓扑 $\mathrm{d}(\lambda)=\{A\leqslant R_R\,|\,\lambda(R/A)=0\}$([1，命题 2.1])，且 $\mathrm{d}(\lambda)=\bigcap\limits_{K_P\neq 0}\mathrm{d}(\rho_P)\supseteq\bigcap\mathrm{d}(\rho_P)=\mathrm{d}(\rho)$ (cf. [1]).

对 R 的极小素理想 P 导致的原子秩函数 ρ_P，由[2，命题 2.2]知，$\mathrm{d}(\rho_P)=\{A\leqslant R_R\,|\,R/A$ 是 $C(P)$-torsion$\}=\{A\leqslant R_R\,|\,(A:r)\cap C(P)\neq\varnothing$，任意的 $r\in R\}$，其中 $(A:r)=\{x\in R\,|\,rx\in A\}$.

命题 1　$\mathrm{d}(\rho_P)$ 为 $E_R(R/P)$ 余生成的 Gabriel 拓扑，即 $\mathrm{d}(\rho_P)=\{A\leqslant R_R\,|\,\mathrm{Hom}_R(R/A,E_R(R/P))=0\}=\{A\leqslant R_R\,|\,\mathrm{Hom}_R(R/(A:r),R/P)=0$，任意的 $r\in R\}$.

---

* 收稿日期：1996-12-02
作者简介：李劲松(1962-)，男，安徽桐城人，硕士，副研究员.

证明 设

$$F = \{A \leqslant R_R \mid \mathrm{Hom}_R(R/(A:r), R/P) = 0, \text{任意的 } r \in R\},$$
$$E = \{x \in E_R(R/P) \mid x \cdot P = 0\}.$$

先证 $E_{R/P}(R/P) = E$. 易见 E 为 $E_R(R/P)$ 的 R-子模,且 $R/P \lhd E$(即为 E 的本质子模). 由 $E_R(R/P)$ 的内射性可证 E 为内射 R/P-模(E 作为 R/P-模与作为 R-模是一致的),即 $E_{R/P}(R/P) = E$. 现证 $\mathrm{d}(\rho_P) = F$. 任意的 $A \in \mathrm{d}(\rho_P)$,有 $(A:r) \cap C(P) \neq \Phi$, 任意的 $r \in R$. 可证 $\mathrm{Hom}_R(R/(A:r), R/P) = 0$,则 $A \in F$, $\mathrm{d}(\rho_P) \subseteq F$. 设 $R \to R/P$ 的自然同态为 φ,则 φ 诱导了一个 R/P 环上的 Goldie 拓扑 $\varphi(F) = \{I/P \leqslant R/P \mid \varphi^{-1}(I/P) \in F\} = \{I/P \leqslant R/P \mid I \in F\}$. 可证 $\varphi(F) = \{I/P \leqslant R/P \mid \mathrm{Hom}_{R/P}(R/P/I/P, E_{R/P}(R/P)) = 0\}$ 为 $E_{R/P}(R/P)$ 余生成的 R/P 环上的 Gabriel 拓扑即 dense 拓扑且为 Goldie 拓扑 $= \{I/P \leqslant R/P \mid I/P \lhd R/P\}$[3,推论 Ⅵ.6.8]. 现若 $A \in F$,则 $(A+P)/P \in \varphi(F)$,即 $(A+P)/P \lhd R/P$,从而 $A \cap C(P) \neq \varnothing$. 同理

$$(A:r) \cap C(P) \neq \varnothing, \text{任意的 } r \in R,$$

即 $A \in \mathrm{d}(\rho_P)$, $F \subseteq \mathrm{d}(\rho_P)$. 故 $\mathrm{d}(\rho_P) = F$.

注 这一结论在[4]中也已给出,但这里是用不同的方法得到的.

由上命题及[1,命题 2.1(b)]可得一个已知的结果.

推论 2 设 $E_R(R/P)$ 余生成的 Gabriel 拓扑为 F,则 R 为 F-Artin 的,即 R_F 是商范畴 Mod-(R,F) 中的 Artin 对象(cf.[5,命题 6.2]).

除非特别说明,以下总假定 R 为半素右 Noether 环.

引理 3 R 关于 Gabriel 拓扑 $\mathrm{d}(\rho_P)$ 的 torsion 子模 $t(R) = P$.

证明 由 $t(R) = \{x \in R \mid x \cdot A = 0, \text{对某个 } A \in \mathrm{d}(\rho_P)\}$ 及 $\mathrm{d}(\rho_P)$ 的定义易知

$$t(R) \subseteq P.$$

反之,令 $X = \text{min-spec}(R) \backslash \{P\}$,由 $(\prod_{Q \in X} Q + P)/P \lhd R/P$ 及 Goldie 定理可证 $\prod_{Q \in X} Q$ ($\prod$ 为乘积符号) $\in \mathrm{d}(\rho_P)$,且 $P \cdot \prod_{Q \in X} Q = 0$,则 $P \subseteq t(R)$.

命题 4 $C(P)$ 为 ore 集且为右分母集.

证明 由 $\overline{C(P)}$ 是 R/P 环中的 ore 集及 P 为 $C(P)$-torsion 可证 R 满足关于 $C(P)$ 的 ore 条件(即 $C(P)$ 是 ore 集),且 $C(P)$ 满足 S2:若 $c \cdot a = 0, c \in C(P), a \in R$,必存在 $c' \in C(P)$,使得 $a \cdot c' = 0$,从而 $C(P)$ 是右分母集($C(P)$ 满足 S2 亦可由[3,命题 Ⅱ.1.5]直接得出).

注 $C(P)$ 是 ore 集亦可由[6]中给出的充要条件(定理 4.6)加以验证. 在 R 非半素时结论不成立.

反例 5 设 $R = \begin{pmatrix} F & F[x] \\ 0 & F[x] \end{pmatrix}$,其中 F 为一域,则 R 为右 Noether 环,R 有两个极小素理想 $P = \begin{pmatrix} F & F[x] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $Q = \begin{pmatrix} 0 & F[x] \\ 0 & F[x] \end{pmatrix}$,$R$ 的幂零根 $N = P \cap Q = \begin{pmatrix} 0 & F[x] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$,此时 $C(P)$ 是 ore 集但 $C(Q)$ 不是(cf.[7,P160]).

推论 6 $\mathrm{d}(\rho_P)$ 为 ore 集 $C(P)$ 决定的 1-拓扑,即 $\mathrm{d}(\rho_P) = \{A \leqslant R_R \mid A \cap C(P) \neq \varnothing\}$.

引理7 Gabriel 拓扑 $d(\lambda)$ 是perfect，从而商环 $R_{d(\lambda)}$ 是Artin 环，λ 为 R 上任一加性秩函数.

证明 记 $F = d(\lambda)$. R 的每个右理想均为有限生成，则 F 有由有限生成右理想组成的基，只需证局部化函子 q:Mod-$R \to$ Mod-R_F 是正合的[3，命题 XI. 3. 4]. 此时 $d(\rho)$ 为 R 上的 Goldie 拓扑 $= \{A \leqslant R_R | A \lhd R_R\}$（参见作者前一篇论文引理 1.3)，由于 $F \supseteq d(\rho)$，则 F- 内射模必为内射模，证明同[3，引理 IX. 2. 10]. 从而用[3，命题 IX. 2. 12]的证明方法可证 q 正合，则 $d(\lambda)$ 为 perfect，Mod-$(R, d(\lambda)) \cong$ Mod-$R_{d(\lambda)}$. 因 $R_{d(\lambda)}$ 在 Mod-$(R, d(\lambda))$ 中的子对象格同构于 R 的 $d(\lambda)$-closed 右理想组成的格 $\mathrm{Sat}_{d(\lambda)}(R)$（[3，推论 IX. 4. 4]，此处 $d(\lambda)$-closed 右理想即为[3] 中的 $d(\lambda)$-saturated 右理想)，而 R 满足关于 $d(\lambda)$-closed 右理想降链条件[1，命题 2. 1]，则 $R_{d(\lambda)}$ 是 Mod-$(R, d(\lambda))$ 中的 Artin 对象，从而 $R_{d(\lambda)}$ 就是 Mod-$R_{d(\lambda)}$ 中的 Artin 对象，即 Artin 环.

上面的结论当 R 仅为右 Noether 环时亦然，见下.

命题8 设 R 为右 Noether 环，则商范畴 Mod-$(R, d(\lambda))$ 是某一 Artin 环上模范畴.

证明 易见 R 为Mod-R 的生成子，即对任一 R- 模 M，存在正合列 $R^{(I)} \to M \to 0$. 记 $F = d(\lambda)$，函子 a:Mod-$R \to$ Mod-(R, F)，$a(M) = M_F$，是正合函子且保持余积(cf. [3. 定理 X. 1. 6]，a 是包函子 i 的左伴随函子)，则存在正合列 $R_F^{(I)} \to M_F \to 0$，即 R_F 是 Mod-(R, F) 的一个生成子(cf. [3，推论 IX. 1. 10])，故商范畴 Mod-(R, F) 就是某一 Artin 环上的模范畴[5，定理 12. 12].

下面考察商环 $R_{d(\rho_P)}$ 的构造.

引理9 $Q(R) \cong E(R)$.

证明 设 F 为 $C(0)$ 决定的 1- 拓扑，即 $F = \{A \leqslant R_R | A \cap C(0) \neq \varnothing\} = \{A \leqslant R_R | A \lhd R_R\}$. $Q(R) = R_F \cong E_F(R) = \{x \in E(R) | (R:x) \in F\}$[3，命题 IX. 2. 4]. 显然 $E_F(R) \subseteq E(R)$，易证 $E(R) \subseteq E_F(R)$，从而 $E_F(R) = E(R)$，$Q(R) \cong E(R)$.

定理10 R 关于 Gabriel 拓扑 $d(\rho_P)$ 的商环 $R_{d(\rho_P)} \cong Q(R/P)$，即为 R/P 的经典右商环.

证明 由引理 3 知 $R_{d(\rho_P)} = (R/P)_{d(\rho_P)} \cong \{x \in E_R(R/P) | x \cdot A \subseteq R/P$，对某个 $A \in d(\rho_P)\}$. 任意的 $0 \neq x \in E_R(R/P)$，存在 $A \lhd R_R$，使得 $x \cdot A \subseteq R/P$[8，引理 1. 1]，而任意的 $r \in R$，有 $(A:r) \lhd R_R$，即 $(A:r) \cap C(0) \neq \Phi$，从而 $(A:r) \cap C(P) \neq \Phi$，$A \in d(\rho_P)$，即 $R_{d(\rho_P)} \cong E_R(R/P)$. 由 R/P 为 $d(\rho_P)$-torsion-free 知 $E_R(R/P)$ 也是 $d(\rho_P)$-torsion-free. 任意的 $0 \neq x \in E_R(R/P)$，有 $x \cdot P \cdot \prod_{Q \in \text{min-spec}(R) \setminus \{P\}} Q = 0$，而 $\prod_{Q \in \text{min-spec}(R) \setminus \{P\}} Q \in d(\rho_P)$，则 $x \cdot P = 0$，$x \in E_{R/P}(R/P)$，从而 $E_R(R/P) = E_{R/P}(R/P)$，由上引理即得结论.

设 λ 为半素右 Noether 环 R 上的任一加性秩函数，不妨设 $\lambda = \sum_{i=1}^{t} k_i \rho^i$，$t \leqslant n$，$k_i \neq 0$，$1 \leqslant i \leqslant t$，则 $d(\lambda) = \bigcap_{i=1}^{t} d(\rho^i)$. 在此 min-spec$(R) = \{P_1, \cdots\cdots, P_n\}$.

综上有：

定理11 (1) $d(\lambda) = \{A \leqslant R_R | A \cap (\bigcap_{i=1}^{t} C(P_i)) \neq \varnothing\}$ 为 R 上 1- 拓扑；

(2) $R_{d(\lambda)} \cong \bigoplus_{i=1}^{t} R_{d(\rho^i)} \cong \bigoplus_{i=1}^{t} Q(R/P_i)$；

(3) $M_{d(\lambda)} \cong \bigoplus_{i=1}^{t} M_{d(\rho^i)}$，$M$ 为任意右 R- 模.

证明 (1) $M_{d(\lambda)}=\bigcap_{i=1}^{t}d(\rho^i)=\bigcap_{i=1}^{t}\{A\leqslant R_R\mid A\cap C(P_i)\neq\varnothing\}$,由$(\bigcap_{j=1,j\neq i}^{t}P_j+P_i)/P_i\lhd R/P_i$知存在$s_i\in(\bigcap_{j=1,j\neq i}^{t}P_j)\cap C(P_i)$. 若任意的$1\leqslant i\leqslant t$,$A\cap C(P_i)\neq\varnothing$,即存在$c_i\in A\cap C(P_i)$,则$\sum_{i=1}^{t}c_is_i\in\bigcap_{j=1}^{t}C(P_j)$,这是因为任意的$1\leqslant j\leqslant t$,$\sum_{i=1}^{t}c_is_i+P_j=c_js_j+P_j$是$R/P_j$的正则元,即$\sum_{i=1}^{t}c_is_i\in C(P_j)$,而$\sum_{i=1}^{t}c_is_i\in A$,则$A\cap(\bigcap_{j=1}^{t}C(P_j))\neq\varnothing$.

(2) R关于$d(\lambda)$的torsion子模$t(R)=\{x\in R\mid \mathrm{Ann}(x)\in d(\lambda)\}=\{x\in R\mid \mathrm{Ann}(x)\in\bigcap_{i=1}^{t}d(\rho^i)\}$,同上有$t(R)=\bigcap_{i=1}^{t}\{x\in R\mid \mathrm{Ann}(x)\in d(\rho^i)\}$,由引理3得$t(R)=\bigcap_{i=1}^{t}P_i$. 令$S=\bigcap_{i=1}^{t}C(P_i)$,任意的$x\in R_{d(\lambda)}$,设$x$被$(r,c)$代表,其中$r\in R$,$c\in S$. 作映射$\sigma:R_{d(\lambda)}\to\bigoplus_{i=1}^{t}R_{d(\rho^i)}$,$\sigma(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_t)$,其中$x_i$被$(r_i,c_i)$代表,$r_i=r\in R$,$c_i=c\in C(P_i)$. 因$d(\lambda)$,$d(\rho^i)$均为1-拓扑,用[3,命题XI.6.2]可证定义合理,同(1)可证σ为单射. 任意的$(x_1,\cdots,x_t)\in\bigoplus_{i=1}^{t}R_{d(\rho^i)}$,$x_i\in R_{d(\rho^i)}$被$(r_i,c_i)$代表. 则$\sum_{i=1}^{t}c_is_i\in S$,$s_i$同(1),且若$(\sum_{i=1}^{t}c_is_i)a=0$,$a\in R$,有

$$a\in\bigcap_{i=1}^{t}P_i,\ (\sum_{i=1}^{t}r_is_i)a\in\bigcap_{i=1}^{t}P_i.$$

由$t(R)=\bigcap_{i=1}^{t}P_i$知存在$t\in S$,使得$(\sum_{i=1}^{t}r_is_i)at=0$,则$(\sum_{i=1}^{t}r_is_i,\sum_{i=1}^{t}c_is_i)$可作为代表元,设其代表$x\in R_{d(\lambda)}$. 假定$\sigma(x)=(y_1,\cdots,y_t)$,其中$y_i$被$(\sum_{j=1}^{t}r_js_j,\sum_{j=1}^{t}c_js_j)$所代表,由$P_i$为$C(P_i)$-torsion可证$(r_i,c_i)\backsim(\sum_{j=1}^{t}r_js_j,\sum_{j=1}^{t}c_js_j)$,$1\leqslant i\leqslant t$. 即$\sigma(x)=(x_1,\cdots,x_t)$,$\sigma$为满射,下证$\sigma$保持运算. 任意的$x,y\in R_{d(\lambda)}$,分别被$(r,s)$,$(r',s')$代表,则$x+y$被$(ra+r'b,u)$代表,其中$sa=s'b=u\in S$. 设$\sigma(x+y)=(z_1,\cdots,z_t)$,$z_i$被$(ra+r'b,u)$代表,$\sigma(x)=(x_1,\cdots,x_t)$,$\sigma(y)=(y_1,\cdots,y_t)$,$x_i,y_i$分别被$(r,s)$,$(r',s')$代表. 因$sa=s'b=u\in S\subseteq C(P_i)$,则$x_i+y_i$即被$(ra+r'b,u)$代表,从而$x_i+y_i=z_i$,$1\leqslant i\leqslant t$,即$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$. 同理可证$\sigma(x\cdot y)=\sigma(x)\cdot\sigma(y)$,故$\sigma$为环同构,即$R_{d(\lambda)}\cong\bigoplus_{i=1}^{t}R_{d(\rho^i)}$,由定理10得$R_{d(\lambda)}\cong\bigoplus_{i=1}^{t}Q(R/P_i)$.

(3) 由于$d(\lambda)$为perfect,则对任意右R-模M有

$$M_{d(\lambda)}\cong M\otimes_R R_{d(\lambda)}\cong M\otimes_R(\bigoplus_{i=1}^{t}R_{d(\rho^i)})\cong\bigoplus_{i=1}^{t}(M\otimes_R R_{d(\rho^i)})\cong\bigoplus_{i=1}^{t}M_{d(\rho^i)}.$$

定理12 设M为有限生成右R-模,则$\rho^i(M)=\mathrm{length}(M_{d(\rho^i)})$.

证明 由$\rho^i(M)=\mathrm{length}(M\otimes_R Q(R/P_i))$,$R_{d(\rho^i)}\cong Q(R/P_i)$及$d(\rho^i)$的完备性即得.

这样,对半素右Noether环R上的任一加性秩函数λ,设$\lambda=\sum_{i=1}^{n}k_i\rho^i$,则有

$$\lambda(M)=\sum_{i=1}^{n}k_i\cdot\mathrm{length}(M_{d(\rho^i)}),$$

M为有限生成R-模,即建立了R上加性秩函数与Artin环上模范畴中的有限长之间的联系. 对一般右Noether环上的加性秩函数λ,由λ的分解形式与ρ^i的定义[2]知,上定理亦建立了一般

右Noether环上加性秩函数与Artin环上模范畴中的有限长之间的联系.

衷心感谢吴泉水副教授的悉心指导.

参考文献:

[1] Krause G. *Additive rank functions and Gabriel filters in right noetherian rings* [J]. J. Algebra, 1990, **134**: 36—44.

[2] Krause G. *Additive rank functions in noetherian rings* [J]. J. Algebra, 1990, **130**: 451—461.

[3] Stenstrom B. *Rings of quotients* [M]. Springer-Verlag, 1975.

[4] Lambek J and Michler G. *The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring* [J]. J. Algebra, 1973, **25**: 364—389.

[5] Toma Albu and Constantin Năstăsescu. *Relative finiteness in module theory* [M]. Pure and applied in mathematics 84, Academic Press, 1984.

[6] Heinicke A G. *On the ring of quotients at a prime ideal of a right noetherian ring* [J]. Can. J. Math., 1972, XXIV(4): 703—712.

[7] Boyle A K and Kosler K A. *Localization at collections of minimal primes* [J]. J. Algebra, 1988, **119**: 147—161.

[8] Chatters A W and Hajarnavis C R. *Rings with chain conditions* [M]. Research notes in mathematics 44, Pitman, 1980.

The Construction of the Gabriel Topologies Arising from any Additive Rank Function and the Corresponding Quotient Rings for any Right Noetherian Semiprime Ring

LI Jin-song

(Inst. of Math., Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: Using the corresponding relationship built by the method used in[1], we give the construction of the Gabriel topologies arising from any additive rank function and the construction of the corresponding quotient rings for any right noetherian semiprime ring. Therefore we establish the association between the additive rank function in noetherian rings and the finite length in the module category for an artinian ring.

Key words: Noetherian rings; additive rank functions; Gabriel filters; quotient rings.