第20卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 1
2000年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2000

格序群的C-根类和K-根类*

郑　熙　强
(南昌航空工业学院基础部，江西 330034)

摘　要:本文研究了 C-根类(即凸 l-子群格可分辨根类)和 K-根类.证明了:投射 l-群、强投射 l-群、两两分裂 l-群、F-群等许多 l-群类都是凸 l-子群格可分辨的,但 Hamilton l-群不是;C-根类格是根类格的一个有伪补的闭子格,而且是根类半群的一个子半群.每个凸 O-子群都是闭的,而且给出了由一簇 K-根类及一个根类所生成的 K-根类的形式.

关键词:格序群;根类;K-根类.
分类号:AMS(1991) 06F15/CLC O153.1
文献标识码:A　　　　**文章编号**:1000-341X(2000)01-0129-05

0　引　言

本文恒设 G 是一个格序群(l-群)、有关概念参看[1]. $C(G)$、$K(G)$、$P(G)$、$\Gamma(G)$、$\Pi(G)$ 和 $\Pi_m(G)$ 分别表示 G 的凸 l-子群、闭凸 l-子群、极子群、正则子群、素子群和极小素子群集合.任意 $g\in G$,$G(g)$ 表示 g 在 G 中生成的凸 l-子群且称为 G 的一个主凸 l-子群. $g^{\perp}$ 和 $g^{\perp\perp}$ 分别称为 G 的一个主极和双主极.设 R 是一个 l-群根类,如果 R 满足条件:"对于两个 l-群 G 和 H,若 $C(G)$ 与 $C(H)$ 格同构,则 $G\in R$ 当且仅当 $H\in R$",则 R 称为 C-根类.类似定义 K-根类(见[2]).设 φ是一个凸 l-子群(,闭凸 l-子群)选择函数,它把一个 l-群 G 映为 $C(G)$(,$K(G)$)的一个子集.若 φ满足条件:"对 l-群 G 和 H,若 f 是 $C(G)$(,$K(G)$)到 $C(H)$(,$K(H)$)上的一个格同构,则 $f(\varphi(G))=\varphi(H)$",则称 φ 或 $\varphi(G)$ 是凸 l-子群(,闭凸 l-子群)格可分辨的.

1　凸 l-子群格的可分辨性

引理 1.1　素子群、正则子群、主凸 l-子群都是凸 l-子群格的不变量.

引理 1.2　设 f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上的格同构,$A\in C(G)$,"$\perp$"和"$'$"分别表示 G 和 H 上的极运算,则:(1) $f(A^{\perp})=f(A)'$,$f(A^{\perp\perp})=f(A)''$;(2) A 是 G 的凸 O-子群当且仅当 $f(A)$ 是 H 的凸 O-子群.

命题 1.3　极子群、极大极、极小极、主极、双主极、Z-子群、基数顶、凸 O-子群、分裂子群

* 收稿日期:1997-02-13
基金项目:国家自然科学基金(19661002)和江西省自然科学基金(98710831)资助项目
作者简介:郑熙强(1964-),男,硕士,副教授.现在美国 Bowling Green 大学留学.

([3])、字典核、特殊值、本质值、Conrad 根等都是凸 l- 子群格可分辨的.

证明 A 是主极当且仅当存在主凸 l- 子群 Q 使 $A = Q^{\perp}$,则 $f(A) = f(Q)'$. 由引理 1.1 $f(Q)$ 也是主凸 l- 子群,从而 $f(Q)'$ 是主极. M 是 G 的 Z- 子群当且仅当对每个主凸 l- 子群 Q,$Q \subseteq M$ 蕴含 $Q^{\perp\perp} \subseteq M$,从而 $f(Q)'' \subseteq f(M)$,说明 $f(M)$ 也是 Z- 子群. $M \in C(G)$ 是 G 的分裂子群当且仅当"任意 $g \in G$ 都存在 $g_1, g_2 \in G$ 使 $g = g_1 + g_2, g_1 \perp g_2, g_1 \in M$ 且 g_2 的每个值都包含 M"当且仅当"对 G 的每个主凸 l- 子群 P 都存在主凸 l- 子群 P_1 和 P_2 使 $P = P_1 \oplus P_2$,其中 $P_1 \subseteq M$ 且每个不包含 P_2 的极大凸 l- 子群都包含 M",则由引理 1.1 推得分裂子群是凸 l- 子群格可分辨的. 其它款项类似可证.

推论 1.4 投射 l- 群、强投射 l- 群、有基的 l- 群、有限基的 l- 群、有限值 l- 群、F- 群、O- 群的基数和类、半投射 l- 群类、两两分裂 l- 群类都是凸 l- 子群格可分辨的.

定理 1.5 一个根类 R 是 C- 根类当且仅当 $R(G)$ 是 G 的凸 l- 子群格可分辨的.

证明 若 R 是 C- 根类且 f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上的格同构,f 限制在 $R(G)$ 上时显然是 $C(R(G))$ 到 $C(f(R(G)))$ 上的格同构. $R(G) \in R$ 及 R 是 C- 根类推得 $f(R(G)) \in R$,从而 $f(R(G)) \subseteq R(H)$. 同理 $f^{-1}(R(H)) \subseteq R(G)$. 则 $f(R(G)) = R(H)$,从而 $R(G)$ 是凸 l- 子群格可分辨的. 反之,设 $R(G)$ 是凸 l- 子群格可分辨的,f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上的格同构且 $G \in R$,则 $G = R(G)$,从而 $R(H) = f(R(G)) = f(G) = H$,从而 $H \in R$.

下面例子表明 Hamiltonian l- 群不是凸 l- 子群格可分辨的.

例 设 G 是 R 与 R 的有限 wreath 积. 对任意 $0 \neq a = (\alpha; \cdots, a_r, \cdots) \in G$,若 $\alpha = 0$,则 a 是有限个基元之和;若 $\alpha \neq 0$,则 a 有唯一值 $0 \times \sum_{r \in R} R_r$. 因此 G 是有限值 l- 群. 令 $e = (1; \cdots, 0, 0, 0, \cdots) \in G$,且对任意 $\delta \in R$ 令 $\bar{\delta} = \{(0; \cdots, 0, r_\delta, 0, \cdots) \in G \mid r_\delta \in R\}$. 则 $-e + \bar{\delta} + e = \overline{\delta + 1} \neq \bar{\delta}$,从而 $\bar{\delta}$ 不是 G 的 l- 理想. 令 $H = \sum(\Gamma(G), R)$,则由[1]中定理 10.12 得 $C(G)$ 和 $C(H)$ 是 l- 同构的. H 是 Hamiltonian l- 群但 G 不是.

2 C- 根类格

定理 2.1 设 R_1、R_2是两个 C- 根类,则 $R_1 \cdot R_2$也是 C- 根类.

证明 设 $G \in R_1 \cdot R_2$,f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上的格同构,则 $G/R_2(G) \in R_1$. 由定理 1.5,$f(R_2(G)) = R_2(H)$. 显然 f 适当限制后是 $C(G/R_2(G))$ 到 $C(H/R_2(H))$ 上的格同构. 则由 $G/R_2(G) \in R_1$及 R_1是 C- 根类推得 $H/R_2(H) \in R_1$,从而 $H \in R_1 \cdot R_2$.

定理 2.2 设 $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是一族 C- 根类,则 $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$及 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$也是 C- 根类.

证明 设 $R = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$. 由[5],$R(G) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda(G)$. 设 f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上的格同构且 $G \in R$,则 $G = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda(G)$. 于是 $H = f(G) = f(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda(H)) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} f(R_\lambda(G))$. 由定理 1.5,$f(R_\lambda(G)) = R_\lambda(H)$,则 $H = f(G) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} f(R_\lambda(G)) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda(H) = R(H)$,从而 $H \in R$.

推论 2.3 若 R 是 C- 根类,则 R 生成的完备根类 R^*也是 C- 根类.

命题 2.4 若 R 是 C- 根类,则 $R^{\perp}$也是 C- 根类.

证明 $G \in R^{\perp}$当且仅当 $R^{\perp}(G) = G$ 当且仅当 $R(G) = 0$. 设 f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上

的格同构且 $G \in R^{\perp}$. 由 R 是 C-根类及定理 1.5 推得 $f(R(G)) = R(H)$. $G \in R^{\perp}$推得 $R(G) = 0$, 则 $R(H) = f(R(G)) = f(0) = 0$, 说明 $H \in R^{\perp}$, 从而 $R^{\perp}$也是 C-根类.

设 X 是一簇 l-群,包含 X 的最小 C-根类记为 C_X. 令 $\overline{X} = \{ G \mid$ 存在 $H \in X$ 及 $H' \in C(H)$ 使 $C(G)$ 与 $C(H')$ 格同构$\}$.

定理 2.5 $C_X = \{ G \mid$ 存在 $G_\lambda \in C(G) \cap \overline{X}$,$\lambda \in \Lambda$,使 $G = \bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\}$.

证明 设 $G \in C_X$,$H \in C(G)$, 则存在 $G_\lambda \in C(G) \cap \overline{X}$ 使 $G = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. 则 $H = H \cap G = H \cap (\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda) = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda}(H \cap G_\lambda)$. 显然 $H \cap G_\lambda \in C(H) \cap C(G_\lambda)$. 由 $G_\lambda \in \overline{X}$ 推得存在 $H_\lambda \in X$ 及 $H_\lambda' \in C(H_\lambda)$ 使 $C(G_\lambda)$ 与 $C(H_\lambda')$ 格同构,设f_λ为其间的格同构. 则f_λ也诱导出 $C(H \cap G_\lambda)$ 到 $C(f_\lambda(H \cap G_\lambda))$ 的格同构,其中 $f_\lambda(H \cap G_\lambda) \in C(H_\lambda') \subseteq C(H_\lambda)$, 从而 $H \cap G_\lambda \in \overline{X}$. 则 $H = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda}(H \cap G_\lambda) \in C_X$. 设 $G_\lambda \in C(G) \cap C_X$,$\lambda \in \Lambda$,$H = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. $G_\lambda \in G_X$推得存在 $H_{\lambda k} \in \overline{X} \cap C(G_\lambda)$,$k \in \Lambda_\lambda$, 使 $G_\lambda = \bigvee\limits_{K\in\Lambda_\lambda} H_{\lambda k}$. 则 $H = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda}\bigvee\limits_{k\in\Lambda_\lambda} H_{\lambda k}$, 其中 $H_{\lambda k} \in C(H) \cap \overline{X}$,从而 $H \in C_X$. 设 G、H 是两个 l-群,f 是 $C(G)$ 到 $C(H)$ 上的格同构且 $G \in C_X$, 则 $G = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$,其中 $G_\lambda \in C(G) \cap \overline{X}$. 则 $H = f(G) = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} f(G_\lambda)$. f 诱导出 $C(G_\lambda)$ 到 $C(f(G_\lambda))$ 上的一个格同构且 $G_\lambda \in \overline{X}$, 则由 $\overline{X}$ 的定义推得 $f(G_\lambda) \in \overline{X}$, 从而 $H \in C_X$. 因此 C_X是 C-根类.

3 格序群的闭凸 l-子群格的可分辨性及 C-根类

定理 3.1 G 的每个凸 O-子群都是闭的,从而是闭凸 l-子群格可分辨的.

证明 设 M 是 G 的一个凸 O-子群, $0 < m_\lambda \in M$,$g = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda$. 下面证明 g 是基元. 假设 g 不是基元,则存在 $0 < x, y \leqslant g$ 使 $x \perp y$. $x \leqslant g = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda$推得 $x = x \wedge g = x \wedge (\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda) = \bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda}(x \wedge m_\lambda)$ 推得存在 $u \in \Lambda$ 使 $x \wedge m_u > 0$. 同理存在 $v \in \Lambda$ 使 $y \wedge m_v > 0$. M 是 G 的凸 0-子群推得 $x \wedge m_u$与 $y \wedge m_v$可比较,这又与 $x \wedge y = 0$ 矛盾. 故 g 是基元,从而 $G(g)$ 是凸 0-子群. 假设 $g \notin M$, 则取定 $0 < m \in M$ 使 $m \leqslant g$. 对任意 $\lambda \in \Lambda$,则 $m + m_\lambda \in G(g)$ 推得 $m + m_\lambda$与 g 可比较. 又因 $g \notin M$, 则 $m + m_\lambda < g$, 从而 $\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda}(m + m_\lambda) \leqslant g$, 即 $m + g \leqslant g$, 这与 $m > 0$ 矛盾. 矛盾说明 $g \in M$,从而 M 是闭的.

命题 3.2 一个根类 R 是 K-根类当且仅当 $R(G)$ 是 G 的闭凸 l-子群格可分辨的.

证明 由[8]的引理 2.4,本命题证明类似于定理 1.5.

若 H 是 G 的一个 l-子群,$M \in C(G)$ 且 $M \subseteq H$, 用 $Cl_H(M)$ 表示 M 在 H 中的闭包. 若 $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是一簇根类,用$\overline{\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda}$表示包含 R_λ,$\lambda \in \Lambda$ 的最小的 K-根类.

引理 3.3 (1) 设 $M \in K(H)$ 且 $G \in C(H)$,则 $M \cap G \in K(G)$;

(2) 设 $M \in K(H)$,$G \in C(H)$ 且 $M \subseteq G$, 则 $M \in K(G)$;

(3) 设 $G \in C(H)$,$M \in C(G)$,则 $\mathrm{Cl}_G(M) \subseteq \mathrm{Cl}_H(M)$.

定理 3.4 设$\{ R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$是一簇 K-根类,则 $\overline{\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda} = \{G \mid G = Cl_G(\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda(G))\}$.

证明 对任意 l-群 G,令 $f(G) = \mathrm{Cl}_G(\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda(G))$. 令 $R = \{G \mid G = f(G)\}$. 下面证明 f 是根映射. 设 $A \in C(G)$, 由引理 3.5(3) 得 $f(A) \subseteq \mathrm{Cl}_G(\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda(A)) \subseteq f(G)$. 从而 $f(A) \subseteq$

$A\cap f(G)$. 反之，设 $0<a\in A\cap f(G)$，则存在 $a_\beta\in\bigvee_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda(G)$，$\beta\in\Delta$，使 $a=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{G}a_\beta$. 则 $a_\beta\in A\cap(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda(G))=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(A\cap R_\lambda(G))=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda(A)$. 则由 $a\in A$ 推得 $a=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{A}a_\beta\in f(A)$. 则 $f(A)=A\cap f(G)$，从而 f 是根映射且 R 是根类. 设 G,H 是两个 l-群，φ是 $K(G)$到 $K(H)$上的格同构且 $G\in R$，则 $G=f(G)$而且 $H=\varphi(G)=\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\varphi(R_\lambda(G)))$. 由命题 3.4 得 $\varphi(R_\lambda(G))=R_\lambda(H)$，从而 $H=\varphi(G)=\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda(H))=R(H)$. 故 $H\in R$，从而 H 是包含$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda$的最小 K-根类.

定理 3.5 设 R 是一个根类. 令 $R^*=\{G\mid$存在 $N\in R$ 使 $K(G)$ 与 $K(N)$ 格同构$\}$，$h(R^*)=\{H\mid$存在 $H_\lambda\in K(H)\cap R^*,\lambda\in\Lambda$,使 $H=Cl_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)\}$，则：

(1) R^*封闭于取凸 l- 子群；

(2) 设 $H\in C(G)$ 且 $H\in h(R^*)$，则 $\overline{H}\in h(R^*)$，这里 $\overline{H}$ 是 H 在 G 中的闭包；

(3) $h(R^*)$ 是包含 R 的最小的 K- 根类.

证明 (1) 设 $G\in R^*$且 $M\in C(G)$，则存在 $H\in R$ 使 $K(G)$ 与 $K(H)$ 格同构，其间的同构映射记为f. 由[9]的引理1.5，$K(\overline{M})$与 $K(M)$ 格同构. 由 $f(\overline{M})\in K(H)\subseteq C(H)$，$H\in R$ 及 R 是根类推得 $f(\overline{M})\in R$. 又由[9]的命题 1.3，f 限制在 $\overline{M}$ 上时是 $K(\overline{M})$ 与 $K(f(\overline{M}))$ 间的格同构. $f(\overline{M})\in R$ 推得的 $\overline{M}\in R^*$，从而 R^*封闭于取凸 l- 子群.

(2) 由 $H\in h(R^*)$ 推得存在 $H_\lambda\in K(H)\cap R^*$，$\lambda\in\Lambda$，使 $H=\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$. $H_\lambda\in K(H)$，$\lambda\in\Lambda$，推得 $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\overline{H}_\lambda\subseteq\overline{H}$，从而 $\mathrm{Cl}_{\overline{H}}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\overline{H}_\lambda)\subseteq\overline{H}$. 反之，设 $0\leqslant h\in\overline{H}$，则存在 $0\leqslant h_\beta\in H=\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$，$\beta\in\Delta$，使 $h=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{G}h_\beta$. 由 $h_\beta\in\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$ 推得存在 $0\leqslant h_{\beta\lambda}\in\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$，$\lambda\in\Lambda_\beta$，使 $h_\beta=\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta}^{H}h_{\beta\lambda}$. 从而 $h=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{G}h_\beta=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{G}\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta}^{H}h_{\beta\lambda}$. 若 $0\leqslant e\in\overline{H}$ 使 $e\geqslant h_{\beta\lambda}$对任意 $\beta\in\Delta$，$\lambda\in\Lambda_\beta$ 成立. 由 $h_\beta\geqslant h_{\beta\lambda}$及 $e\geqslant h_{\beta\lambda}$推得 $e\wedge h_\beta\geqslant h_{\beta\lambda}$对任意 $\lambda\in\Lambda_\beta$ 成立. 而且由 $0\leqslant e\wedge h_\beta\leqslant h_\beta\in H$ 及 $H\in C(\overline{H})$ 推得 $e\wedge h_\beta\in H$，从而由 $h_\beta=\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta}^{H}h_{\beta\lambda}$推得 $e\wedge h_\beta\geqslant h_\beta$，从而 $e\geqslant h_\beta$对任意 $\beta\in\Delta$ 成立. 则 $e\geqslant\bigvee_{\beta\in\Delta}^{G}h_\beta=h$，从而 h 是元素集$\{h_{\beta\lambda}\mid\beta\in\Delta,\lambda\in\Lambda_\beta\}$ 在 $\overline{H}$ 中的上确界. 则 $h\in\mathrm{Cl}_{\overline{H}}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\overline{H}_\lambda)$ 且 $\overline{H}=\mathrm{Cl}_{\overline{H}}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\overline{H}_\lambda)$. 则由引理 3.3(2) 推得 $\overline{H}_\lambda\in K(\overline{H})$. 由 $H_\lambda\in R^*$及[9]的引理 1.5 推得 $\overline{H}_\lambda\in R^*$，从而 $\overline{H}_\lambda\in K(\overline{H})\cap R^*$. 则由 $\overline{H}=\mathrm{Cl}_{\overline{H}}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\overline{H}_\lambda)$ 推得 $\overline{H}\in h(R^*)$.

(3) 设 $H\in h(R^*)$ 且 $M\in C(H)$，则存在 $H_\lambda\in K(H)\cap R^*$使 $H=\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$. 则 $M=M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$. 下面证明 $M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)=\mathrm{Cl}_M(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(M\cap H_\lambda))$. 由引理 3.3(1) 式推得 $M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)\in K(M)$ ，从而 $M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)\supseteq\mathrm{Cl}_M(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(M\cap H_\lambda))$. 反之，设 $0\leqslant m\in M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$，则 $m=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{H}m_\beta$，其中 $0\leqslant m_\beta\in\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$. $M\in C(G)$ 及 $0\leqslant m_\beta\leqslant m$ 推得 $m_\beta\in M$ ，从而 $m_\beta\in M\cap(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(M\cap H_\lambda))$. 由 $m=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{H}m_\beta$及 $m\in M$ 推得 $m=\bigvee_{\beta\in\Delta}^{M}m_\beta$，从而 $m\in\mathrm{Cl}_M(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(M\cap H_\lambda))$. 故 $M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)=\mathrm{Cl}_M(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(M\cap H_\lambda))$. 从而 $M=M\cap\mathrm{Cl}_H(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda)$ 推得 $M=\mathrm{Cl}_M(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(M\cap H_\lambda))$，则 $M\in h(R^*)$. 设 $G_\beta\in h(R^*)\cap C(H)$ 且 $G=\bigvee_{\beta\in\Delta}G_\beta$. 由本定理的(2) 款推得 $\overline{G_\beta}\in h(R^*)$. 上面已证明 $h(R^*)$ 封闭于取凸 l- 子群，因此要

证 $\bigvee_{\beta\in\Delta} G_\beta \in h(R^*)$ 只要证得 $\bigvee_{\beta\in\Delta} \overline{G_\beta} \in h(R^*)$ 即可. 为表述方便就设 $G_\beta \in K(H)$. 由 $G_\beta \in h(R^*)$ 推得存在 $G_{\beta\lambda} \in K(G_\beta) \cap R^*$ 使 $G_\beta = \mathrm{Cl}_{G_\beta}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta} G_{\beta\lambda})$. 则 $G = \bigvee_{\beta\in\Delta} \mathrm{Cl}_{G_\beta}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta} G_{\beta\lambda})$. 由引理 3.3(3) 推得 $\mathrm{Cl}_{G_\beta}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta} G_{\beta\lambda}) \subseteq \mathrm{Cl}_G(\bigvee_{\beta\in\Delta}\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta} G_{\beta\lambda}) \subseteq G$, 则 $G = \mathrm{Cl}_G(\bigvee_{\beta\in\Delta}\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta} G_{\beta\lambda})$. 由 $G_{\beta\lambda} \in K(G_\beta)$ 及 $G_\beta \in K(H)$ 推得 $G_{\beta\lambda} \in K(H)$, 则由引理 3.3(3) 推得 $G_{\beta\lambda} \in K(G)$, 从而 $G_{\beta\lambda} \in K(G) \cap R^*$. 则由 $G = \mathrm{Cl}_G(\bigvee_{\beta\in\Delta}\bigvee_{\lambda\in\Lambda_\beta} G_{\beta\lambda})$ 推得 $G \in h(R^*)$, 从而 $h(R^*)$ 是根类. 由 $h(R^*)$ 的定义容易进一步推得 $h(R^*)$ 是 K- 根类.

参考文献:

[1] ANDERSON M and FEIL T. *Lattice-Ordered Groups* [M]. D. Reidel Publishing Company, 1998.

[2] CONRAD P. *K-radical classes of l-groups* [M]. Lecture Notes in Math., 848, Springer, Berlin 1981.

[3] MARTINEZ J. *The closed subgroup problem for lattice-ordered groups* [J]. Arch. Math., 1990, **54**: 212—224.

[4] KENOYER D B. *Recognizability in the lattice of convex l-subgroups of a lattice-ordered group* [J]. Czech. Math. J, 1984, **34**: 411—416.

[5] JAKUBIK J. *Radical mappings and radical classes of lattice ordered groups* [J]. Symposia Math., 1977, **21**: 451—477.

[6] ZHENG Xi-qiang and QI Zhi-nan. *The equivalence relation of convex l-subgroups of an l-group determined by its minimal primes* [J]. 数学进展, 1995, **24**(1): 89—90.

[7] 姚海楼,平艳茹. 关于 l-群的半单结构 [J]. 数学学报, 1996, **39**(6): 329—340.

[8] BLEIER R and CONRAD P. *The lattice of closed ideals and a*-extensions of an abelian l-groups* [J]. Pacific J. of Math., 1973, **47**: 329—340.

[9] BLEIER R and CONRAD P. *a*-closures of lattice-ordered groups* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **209**: 367—387.

[10] 仝道荣. 格群的子积类 [J]. 数学学报, 1994, **37**(2): 224—229.

C-Radical Classes and *K*-Radical Classes of Lattice Ordered Groups

ZHENG Xi-qiang

(Basic Course Dept., Nanchang Institute of Aeronautical Technology, 330034)

Abstract: In this paper, C-radical classes are determined by the lattice of convex l-subgroups, and K-radical classes of l-groups are studied.

Key words: lattice ordered groups; radical classes; K-radical classes.