第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

复亚正定矩阵的一些性质*

杨 载 朴

(盐城工学院，江苏 224003)

摘 要:复亚正定矩阵是正定 Hermite 矩阵的推广，本文讨论了这一类矩阵张量积的性质，并将实对称矩阵的Schur 定理、华罗庚定理和 Minkowski 不等式推广到较为广泛的复矩阵类.

关键词:复亚正定矩阵；张量积；Hadamard 乘积；Schur 定理.

分类号:AMS(1991) 15A57/CLC O151.21

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)01-0134-05

1 引 言

在历史上，正定矩阵的研究最先限于实对称矩阵和 Hermite 矩阵，它在几何学、物理学以及概率论等学科都得到重要的应用，但随着数学本身以及应用矩阵的其它学科的需要，近年来，有不少文献研究了未必对称的较为广义的正定矩阵，如见文献[1][2][3]. 本文讨论了未必共轭对称的复亚正定矩阵的张量积性质，并将实对称矩阵的 Schur 定理、华罗庚定理和 Minkowski不等式推广到这一类复矩阵. 在本文中，$C^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 复矩阵类，$\overline{A}^T$ 表示 A 的转置共轭矩阵，$\sigma(A)$ 表示 A 的谱，即 A 的特征值的集合，$|A|$ 表示方阵 A 的行列式.

设 $A\in C^{n\times n}$，记 $H(A)=\dfrac{A+\overline{A}^T}{2}$，$G(A)=\dfrac{A-\overline{A}^T}{2}$，则 $A=H(A)+G(A)$. 显然，$\overline{H(A)}^T=H(A)$，$\overline{G(A)}^T=-G(A)$. $H(A)$ 与 $G(A)$ 分别称为 A 的Hermite分支与反Hermite分支.

定义 1 设 $A\in C^{n\times n}$，若对任意的 $0\neq X\in C^{n\times 1}$，都有 $X^TH(A)\overline{X}>0$，则称 A 为复亚正定矩阵，简称复亚正定阵.

显然，A 为复亚正定阵 $\Leftrightarrow H(A)$ 的特征值均为正.

例：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2+i & 0\\ -i & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad H(A)=\begin{pmatrix}1 & -1+i & 0\\ -1-i & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$H(A)$ 的特征值为 $2\pm\sqrt{3}$，4，故 $H(A)$ 为正定Hermite矩阵，因而 A 为复亚正定阵.

引理 1 设 $A\in C^{n\times n}$，则对任意的 $X\in C^{n\times 1}$，$X^TA\overline{X}$ 的实部与虚部分别为：

* **收稿日期**:1997-01-20

作者简介:杨载朴(1945-)，男，江苏省建湖县人，盐城工学院副教授.

$$\mathrm{Re}(X^T A \overline{X}) = X^T H(A) \overline{X},\ \mathrm{Im}(X^T A \overline{X}) = \frac{1}{i} X^T G(A) \overline{X} \tag{1}$$

引理 2 设 A 为复亚正定阵,则 A 之特征值的实部皆为正,因而 $|A| \neq 0$,从而 A 可逆.

引理 3 设 $A \in C^{n \times n}$,则下列各点都是互为等价的:

(1) A 为复亚正定阵.

(2) 任意的 $0 \neq X \in C^{n \times 1}$,均有 $\mathrm{Re}(X^T A \overline{X}) > 0$.

(3) A^T 为复亚正定阵.

(4) $\overline{A}^T$ 为复亚正定阵.

(5) A^{-1} 为复亚正定阵.

(6) 对任意非异复方阵 P,$P^T A \overline{P}$ 为复亚正定阵.

(7) 对任意正实数 k,kA 为复亚正定阵.

(8) A 的任一主子矩阵为复亚正定阵.

(9) A 的任一顺序主子矩阵为复亚正定阵.

2 复亚正定阵张量积的性质

设 $A = (a_{jk})_{m \times m}$,$B = (b_{jk})_{n \times n}$ 均为复方阵,则

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots\cdots & a_{1m}B \\ \cdots\cdots & & \\ a_{m1}B & \cdots\cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

称为 A 与 B 的张量积,亦称为 Kronecker 积.

引理 4[5] $(A \otimes C)(B \otimes D) = AB \otimes CD$.

定理 1 设 A 为 m 阶复亚正定阵,B 为 n 阶复亚正定阵,则 $A \otimes H(B)$、$H(A) \otimes B$ 均为复亚正定阵.

证明 因 A 为复亚正定阵,故 $H(A)$ 为正定 Hermite 阵,故存在 m 阶非异复方阵 P,使 $P^T H(A) \overline{P} = I_m$. 同理存在 n 阶非异复方阵 Q,使 $Q^T H(B) \overline{Q} = I_n$.

$$\begin{aligned}
(P \otimes Q)^T [A \otimes H(B)] (\overline{P \otimes Q}) &= (P \otimes Q)^T [(H(A) + G(A)) \otimes H(B)] (\overline{P} \otimes \overline{Q}) \\
&= (P^T \otimes Q^T)[H(A) \otimes H(B) + G(A) \otimes H(B)](\overline{P} \otimes \overline{Q}) \\
&= P^T H(A) \overline{P} \otimes Q^T H(B) \overline{Q} + (P^T \otimes Q^T)[G(A) \otimes H(B)](\overline{P} \otimes \overline{Q}) \\
&= I_m \otimes I_n + (P \otimes Q)^T [G(A) \otimes H(B)] (\overline{P \otimes Q}) \\
&= I_{mn} + (P \otimes Q)^T [G(A) \otimes H(B)] (\overline{P \otimes Q}).
\end{aligned}$$

因而,$A \otimes H(B) = [(P \otimes Q)^T]^{-1} I_{mn} (\overline{P \otimes Q})^{-1} + G(A) \otimes H(B)$,又因 $G(A)$ 为反 Hermite阵,$H(B)$ 为Hermite阵,易知 $G(A) \otimes H(B)$ 为反Hermite阵,所以 任意的 $0 \neq X \in C^{mn \times 1}$,有 $\mathrm{Re}\{X^T [G(A) \otimes H(B)] \overline{X}\} = 0$. 又因 $P \otimes Q$ 非异,故 $Y = (P \otimes Q)^{-1} X \neq 0$,所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{X^T [A \otimes H(B)] \overline{X}\} &= \mathrm{Re}\{X^T [(P \otimes Q)^T]^{-1} I_{mn} (\overline{P \otimes Q})^{-1} \overline{X}\} \\
&= \mathrm{Re}\{[(P \otimes Q)^{-1} X]^T I_{mn} \overline{(P \otimes Q)^{-1} X}\} = \mathrm{Re}(Y^T I_{mn} \overline{Y}) = Y^T \overline{Y} > 0
\end{aligned}$$

由引理 3(2),$A \otimes H(B)$ 为复亚正定阵. 同理,$H(A) \otimes B$ 为复亚正定阵,证毕.

3 Schur 定理与华罗庚定理的推广

设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{jk})_{n\times n}$ 均为 n 阶复方阵，它们的Hadamard乘积 $A\circ B=(a_{jk}b_{jk})_{n\times n}$ 在理论上和应用上有很多应用，下面将就 A 与 B 为复亚正定阵的情况加以讨论.

定理 2 设 A 与 B 均为 n 阶复亚正定阵，则 $A\circ H(B)$，$H(A)\circ B$ 亦为复亚正定阵.

证明 当 A 与 B 都是 n 阶复方阵时，容易看出，$A\circ H(B)$ 的 n 个行恰好是 $A\otimes H(B)$ 的第 $1,n+2,2n+3,\cdots,n^2$ 这 n 个行. $A\circ H(B)$ 的 n 个列恰好是 $A\otimes H(B)$ 的第 $1,n+2,2n+3,\cdots,n^2$ 这 n 个列. 故 $A\circ H(B)$ 是 $A\otimes H(B)$ 的一个主子矩阵，由定理 1，$A\otimes H(B)$ 为复亚正定阵，再由引理 3[8]，$A\circ H(B)$ 为复亚正定阵. 同理可证，$H(A)\circ B$ 亦为复亚正定阵. 证毕.

若 A,B 均为 n 阶(实对称)正定阵时，$H(B)=B$，$A\circ H(B)=A\circ B$，由定理 2 即得下面的Schur定理：

推论 1 两个正定阵的 Hadamard 乘积仍正定.

定理 3 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为复亚正定阵，则对任何正整数 k，方阵

$$G=\begin{pmatrix} a_{11}(\mathrm{Re}a_{11})^{k-1} & a_{12}(\frac{a_{12}+\bar{a}_{21}}{2})^{k-1} & \cdots & a_{1n}(\frac{a_{1n}+\bar{a}_{n1}}{2})^{k-1} \\ a_{21}(\frac{a_{21}+\bar{a}_{12}}{2})^{k-1} & a_{22}(\mathrm{Re}a_{22})^{k-1} & \cdots & a_{2n}(\frac{a_{2n}+\bar{a}_{n2}}{2})^{k-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}(\frac{a_{n1}+\bar{a}_{1n}}{2})^{k-1} & a_{n2}(\frac{a_{n2}+\bar{a}_{2n}}{2})^{k-1} & \cdots & a_{nn}(\mathrm{Re}a_{nn})^{k-1} \end{pmatrix}$$

是复亚正定阵.

证明 因 $G=A\circ\underbrace{H(A)\circ H(A)\circ\cdots\circ H(A)}_{k-1\text{个}}$，由定理 2 及归纳法即得证.

当 A 为(实对称)正定阵时，$A=H(A)$，即得下面关于(实对称)正定阵的华罗庚定理：

推论 2[6] 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 是(实对称)正定阵，则对任何正整数 k，方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & \cdots & a_{1n}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \cdots & a_{2n}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^k & a_{n2}^k & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$$

是正定阵.

推论 3 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{jk})_{n\times n}$ 均为复亚正定阵，则对任何复数 $d_{jk}(1\leqslant j<k\leqslant n)$，任何纯虚数 $d_{jj}(j=1,\cdots,n)$ 及任何正整数 k，方阵

$$G_1=\begin{pmatrix} (a_{11}+d_{11})(\mathrm{Re}b_{11})^{k-1} & (a_{12}+d_{12})(\frac{b_{12}+\bar{b}_{21}}{2})^{k-1} & \cdots & (a_{1n}+d_{1n})(\frac{b_{1n}+\bar{b}_{n1}}{2})^{k-1} \\ (a_{21}-\bar{d}_{12})(\frac{b_{21}+\bar{b}_{12}}{2})^{k-1} & (a_{22}+d_{22})(\mathrm{Re}b_{22})^{k-1} & \cdots & (a_{2n}+d_{2n})(\frac{b_{2n}+\bar{b}_{n2}}{2})^{k-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (a_{n1}-\bar{d}_{1n})(\frac{b_{n1}+\bar{b}_{1n}}{2})^{k-1} & (a_{n2}-\bar{d}_{2n})(\frac{b_{n2}+\bar{b}_{2n}}{2})^{k-1} & \cdots & (a_{nn}+d_{nn})(\mathrm{Re}b_{nn})^{k-1} \end{pmatrix}$$

是复亚正定阵.

证明 作反 Hermite 矩阵, $D=(d_{jk})_{n\times n}$,其中 $d_{jk}=-\overline{d}_{kj}(n\geqslant j>k\geqslant 1)$,因 A 为复亚正定阵,又因 $H(A+D)=H(A)$,故 $A+D$ 仍为复亚正定阵,但

$$G_1=(A+D)\circ\underbrace{H(B)\circ\cdots\circ H(B)}_{k-1\text{个}}$$

故由定理 2 及归纳法知, G_1 是复亚正定阵,证毕.

4 关于复亚正定阵行列式的不等式

定理 4 (广义 Minkowski 不等式) 设 A 为 n 阶复亚正定阵,且 $\overline{\sigma(A)}=\sigma(A)$, B 为 n 阶正定 Hermite 阵,则 $|A+B|^{\frac{1}{n}}>|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$.

证明 先证行列式 $|A+B|$ 为实数,且 $|A+B|>0$.

因 B 为正定 Hermite 阵,故存在非异复方阵 P,使 $P^TB\overline{P}=I_n$. 因 A 为复亚正定阵,由引理 3[6], $P^TA\overline{P}$ 亦为复亚正定阵,又因 $\overline{\sigma(A)}=\sigma(A)$,于是 $\overline{\sigma(P^TA\overline{P})}=\sigma(P^TA\overline{P})$,于是存在 n 阶酉矩阵 U,使

$$U^T(P^TA\overline{P})\overline{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & * & & \\ & & & a_1+b_1i & & & & \\ & & & & a_1-b_1i & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & \bigcirc & & & & a_s+b_si & \\ & & & & & & & a_s-b_si\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1\cdots\lambda_r$ 是 $P^TA\overline{P}$ 的全部实特征值, $a_j\pm b_ji,(j=1,\cdots,s)$ 是 $P^TA\overline{P}$ 的全部复特征值, $b_j\neq 0,(j=1,\cdots,s)$. 由 $P^TA\overline{P}$ 为复亚正定阵知 $\lambda_k>0,(k=1,\cdots,r)$; $a_j>0,(j=1,\cdots,s)$,所以:

$$\begin{aligned}|U^T\overline{U}|\,|P^T\overline{P}|\,|A+B|&=|U^T|\,|P^TA\overline{P}+I_n|\,|\overline{U}|\\ &=|U^T(P^TA\overline{P})\overline{U}+I_n|\\ &=\prod_{k=1}^{r}(1+\lambda_k)\prod_{j=1}^{s}[(1+a_j)^2+b_j^2]>0\end{aligned}\tag{3}$$

而 $|U^T\overline{U}|=1$,又因 $P^T\overline{P}$ 为 Hermite 阵,故 $|P^T\overline{P}|$ 为实数,且 $|P^T\overline{P}|=|P|\overline{|P|}>0$,故由(3)式知 $|A+B|$ 为实数,且 $|A+B|>0$.

又因

$$\begin{aligned}|P^T\overline{P}|^{\frac{1}{n}}\cdot|A+B|^{\frac{1}{n}}&=|P^TA\overline{P}+I_n|^{\frac{1}{n}}\\ &=|U^T(P^TA\overline{P}+I_n)\overline{U}|^{\frac{1}{n}}=|U^T(P^TA\overline{P})\overline{U}+I_n|^{\frac{1}{n}}\\ &=\left\{\prod_{k=1}^{r}(1+\lambda_k)\prod_{j=1}^{s}[(1+a_j)^2+b_j^2]\right\}^{\frac{1}{n}}>\left\{\prod_{k=1}^{r}(1+\lambda_k)\prod_{j=1}^{s}[1+(a_j^2+b_j^2)]\right\}^{\frac{1}{n}}\end{aligned}\tag{4}$$

(因 $2a_j>0$),应用 Hölder 第二不等式[7]于上式右边,(4)式可化为:

$$|P^T\overline{P}|^{\frac{1}{n}}\cdot|A+B|^{\frac{1}{n}}>1+[\prod_{k=1}^{r}\lambda_k\prod_{j=1}^{s}(a_j^2+b_j^2)]^{\frac{1}{n}}$$
$$=|P^TB\overline{P}|^{\frac{1}{n}}+[|U^T||P^TA\overline{P}||\overline{U}|]^{\frac{1}{n}}$$
$$=|P^T\overline{P}|^{\frac{1}{n}}(|B|^{\frac{1}{n}}+|A|^{\frac{1}{n}})$$

(因 $|U^T||\overline{U}|=1$)，约去正数 $|P^T\overline{P}|^{\frac{1}{n}}$ 得 $|A+B|^{\frac{1}{n}}>|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$.

推论 4 设 A,B 均为 n 阶正定 Hermite 阵，则 $|A+B|^{\frac{1}{n}}>|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$.

证明 因 A 为正定 Hermite 阵，故 A 为复亚正定阵，且其特征值均为实数，亦即有 $\overline{\sigma(A)}=\sigma(A)$，由定理 4 知，$|A+B|^{\frac{1}{n}}>|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$.

参考文献：

[1] 佟文廷. 广义正定矩阵. 数学学报，1984，27(6)：801—810.

[2] 屠伯埙. 亚正定阵理论(Ⅰ). 数学学报，1990，33(4)：462—471.

[3] 屠伯埙. 亚正定阵理论(Ⅱ). 数学学报，1991，34(1)：91—102.

[4] PULLMAN N J. *Matrix Theory and Applications* [M]. Marcel Dekker Inc，New York and Basel.，1976，209—227.

[5] 佟文廷. 关于矩阵张量积的谱. 数学学报，1980，23(1)：128—134.

[6] 华罗庚. 一个关于行列式的不等式. 数学学报，1955，5(4)：463—470.

[7] MARSHALL A W，OLKIN I. *Inegualities: Theory of Majoriazation and its Applications* [M]. Academic Press，1979.

Some Properties of Complex Metapositive Definite Matrices

YANG Zai-pu

(Yancheng Institute of Technology，Jiangsu 224003)

Abstract: In this paper we first discuss the properties of Kronecker product of complex metapositive definite matrices，and then generalize the Schur theorem，the Hua Luogeng theorem and the Minkowski ineguality of real symmetric matrices.

Key words: complex metapositive definite matrix; Kronecker product; Hadamard product; Schur theorem.