第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

加强P除环上自共轭矩阵的几个定理*

黎 奇 升

(吉首大学数学系，湖南吉首 416000)

摘 要：证明了如果Ω是加强P-除环，则$R=\{a \mid a\in\Omega, \bar{a}=a\}$为实封闭域. 利用该结果还讨论了加强$P$-除环上自共轭矩阵的正定性.

关键词：加强P-除环；实封闭域；自共轭矩阵.

分类号：AMS(1991) 15A/CCL O152.21

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)01-0139-04

文[1]定义加强P除环为具有对合反自同构$\sigma: a\to\sigma(a)=\bar{a}$，$(\bar{\bar{a}})=a$并且满足下面条件(1)—(4)的除环$\Omega$：

(1) 设$a_i\in\Omega$，则$\sum_{i=1}^{m} a_i\bar{a}=0$当且仅当$a_i=0, i=1,\cdots,m$；

(2) $R=\{a \mid \bar{a}=a, a\in\Omega\}\leqslant C$. 此处$C$表示$\Omega$的中心；

(3) 对任意的$a_i\in\Omega, i=1,2,\cdots,m$. 方程$x^2-\sum_{i=1}^{m} a_i\bar{a}_i=0$在$\Omega$中有且仅有两解；

(4) Ω有子域Σ，它是C的代数封闭扩张.

文[1]，[2]研究了方阵的酉相似，把域上自共轭矩阵一些著名结果推广到Ω上. 本文首先证明：若Ω为加强P除环，则条件(2)中的R必为实封闭域. 然后把自共轭矩阵合同标准形，正定(半正定)自共轭阵的一些等价刻画推广Ω上.

在本文中，B^*表示B的转置共轭，即$B^*=\overline{B}'$；$SC_n(\Omega)$记Ω上n阶自共轭矩阵的集合；$A\geqslant 0$表示$A\in SC_n(\Omega)$，且A为半正定的；$A>0$表示$A\in SC_n(\Omega)$且A为正定的；I_m表示主对角线上元素为e的m阶单位阵.

引理 1[2] 设$A\in SC_n(\Omega)$，则存在n阶酉阵U，使得$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i\in R$为$A$的特征值.

引理 2[2] 设$A\in SC_n(\Omega)$，则A在R中至少有n个特征值.

引理 3[2] 设$A\in SC_n(\Omega)$，λ是A的右特征值，则$\lambda\in R$，因而是A的特征值.

引理 4 设$0\neq a\in R$，则a与$-a$有且仅有一个能表成R中非零元素之平方.

证明 设u是方程$x^2+e=0$在Σ中的一个解，其中e表示Ω的单位元. 显然$\bar{u}^2+e=0$，$(-u)^2+e=0$，而$\bar{u}\neq u$(否则$u\in R$，与定义条件(1)矛盾)，所以$\bar{u}=-u$(因$x^2+e=0$在Σ中只

* 收稿日期：1994-04-29

作者简介：黎奇升(1964-)，男，土家族，湖南桑植人，硕士，吉首大学副教授.

有两解).

令 α,β 分别为方程 $x^2-a=0,x^2+a=0$ 在 Σ 中的解,则 $\alpha^2=a,\beta^2=-a$,于是

$$(\alpha\beta^{-1})^2+e=0,$$

故 $\alpha\beta^{-1}=u$ 或 $\alpha\beta^{-1}=-u$.若 $\alpha\beta^{-1}=u$,则

$$\alpha=u\beta,\bar{\alpha}=\overline{u\beta}=-u\bar{\beta},\alpha+\bar{\alpha}=(\beta-\bar{\beta})u \qquad (*)$$

又 $(\alpha-\bar{\alpha})(\alpha+\bar{\alpha})=0$,当 $\bar{\alpha}=\alpha$ 时,$\alpha\in R$,否则 $\alpha+\bar{\alpha}=0$.据($*$)式 $\bar{\beta}=\beta$, $\beta\in R$.

若 $\alpha\beta^{-1}=-u$,同理可证 $\alpha\in R$ 或 $\beta\in R$.

加强 P 除环定义中条件(1)保证 $a,-a$ 不能都表示为 R 中非零元素之平方.

引理 5 设 A 为 Ω 上 n 阶矩阵,且 A 相似于子域 R 上的方阵.若 A 的特征值都在 R 中,则 A 至多有 n 个特征值.

证明 设 $P^{-1}AP=J$,P 为 Ω 上非奇异阵,J 为 R 上的方阵.令 $f(x)=\det(xI_n-J)$,则 $f(x)$ 为 $R[x]$ 中 n 次多项式.

设 λ_0 为 A 的特征值.据条件 $\lambda_0\in R$,令 $A\alpha=\lambda_0\alpha$, $0\neq\alpha\in\Omega^{n\times1}$,则

$$P^{-1}(\lambda_0I_n-A)P(P^{-1}\alpha)=(\lambda_0I_n-J)\beta=0,\beta=P^{-1}\alpha.$$

而 $\beta\neq0$.所以 (λ_0I_n-J) 为 R 上奇异矩阵,$f(\lambda_0)=\det(\lambda_0I_n-J)=0$,$f(x)=0$ 在 R 中至多有 n 个根.引理成立.

该引理去掉特征值在 R 中的要求便不成立.例如 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 为四元数除环上方阵,不难验证 $\pm i,\pm j,\pm k$ 均为 A 的特征值.

引理 6 设 $A\in SC_n(\Omega)$,则 A 有且仅有 n 个特征值(含重数).

证明 据引理 2 只须证 A 至多有 n 个特征值,引理 3 保证 A 的特征值属于 R,中心化定理[2]保证 A 相似于 R 上矩阵,应用引理 5 便得.

定理 1 设 Ω 为加强 P 除环,则 R 为实封闭域.

证明 令 $R^+=\{a\,|\,a\in R,\exists\ 0\neq t\in R,使\ a=t^2\}$,则

(1) $0\notin R^+$;

(2) 任意的 $a\in R$,引理 4 说明:$a=0,a\in R^+,-a\in R^+$ 有且仅有一个成立;

(3) 设 $a,b\in R^+$,则$\exists\ 0\neq t_i\in R;i=1,2$,使得

$$a=t_1^2,b=t_2^2,ab=(t_1t_2)^2,t_1t_2\neq0,$$

从而 $ab\in R^+,a+b\neq0$.否则与 Ω 定义条件(1)矛盾.

若 $-(a+b)\in R^+$,则$\exists\ 0\neq t_3\in R$,使得 $-(a+b)=t_3^2$,即 $t_1^2+t_2^2+t_3^2=0$.与定义条件(1)矛盾,故必有 $a+b\in R^+$.

综合(1),(2),(3)知 R 为序域.

设 $f(x)\in R[x]$,$f(x)$ 的次数为奇数,$\xi\in\Sigma,\xi\notin R,f(\xi)=0$,显然 $\bar{\xi}\in\Sigma$ 且 $f(\bar{\xi})=0,\bar{\xi}\neq\xi$,所以 $f(x)$ 在 Σ 中而不在 R 中的根成对出现,$f(x)=0$ 在 R 中必有根,R 为实闭域.

任意的 $a,b\in R,a>b$ 规定为 $a-b\in R^+$;$a\geqslant b$,规定为 $a>b$ 或 $a=b$.关于这个序的性质见[3].

设 $0\neq X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in\Omega^{n\times1}$,易知 $\bar{X}'X>0$.

由引理 1,定理 1 仿域上方法不难证明下面:

定理 2　设 $A\in SC_n(\Omega)$，则下面陈述等价：

(1)　$A>0$.

(2)　A 的全部特征值大于零(指 R 中零元).

(3)　对任意的 $0\neq X\in\Omega^{n\times 1}$，$f(X)=\overline{X}'AX>0$.

(4)　A 的所有主子矩阵均正定.

定理 3　设 $A\in SC_n(\Omega)$，则下列陈述等价：

(1)　$A\geqslant 0$.

(2)　A 的所有特征值均大于或等于 0.

(3)　对任意的 $0\neq X\in\Omega^{n\times 1}$，$f(X)=\overline{X}'AX\geqslant 0$.

(4)　A 的所有主子矩阵均半正定.

推论 1　设 $A,B\in SC_n(\Omega)$，则

(1)　若 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$，则 $A+B\geqslant 0$；

(2)　$A\geqslant 0,B>0$，则 $A+B>0$.

定理 4　设 $A\in SC_n(\Omega)$.

(1)　若 $A>0$，则对任意正整数 k，存在 $B\in SC_n(\Omega)$，$B>0$，使 $A=B^k$；

(2)　若 $A\geqslant 0$，则对任意正整数 k，$\exists\ B\in SC_n(\Omega)$，$B\geqslant 0$，使得 $A=B^k$.

证明　注意到对任意的 $\lambda\in R$，$\lambda>0$，$x^k=\lambda$ 在 R 中有正元素解. 利用引理 1，定理 2，3 便可推得.

定理 5　设 $A\in SC_n(\Omega)$，则存在 n 阶非奇异矩阵 P，使得

$$P^*AP=\mathrm{diag}(\overbrace{e,\cdots,e}^{s\uparrow},\overbrace{-e,\cdots,-e}^{t\uparrow},0,\cdots,0),$$

其中 $s+t=$秩(A)，e 为 R 的单位元，且 s 和 t 都是由 A 唯一确定的，分别称为 A 正惯指标和负惯指标.

证明　令 $U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,-\mu_1,\cdots,-\mu_t,0,\cdots,0)$，其中 $\lambda_i\in R$，$\mu_j\in R$，$\lambda_i>0$，$\mu_j>0$，$i=1,2,\cdots,s$；$j=1,2,\cdots,t$. 对每个 i,j，令 $(\sqrt{\lambda_i})^2=\lambda_i$，$(\sqrt{\mu_j})^2=\mu_j$，$\sqrt{\lambda_i}>0$，$\sqrt{\mu_j}>0$，

$$P=U\begin{bmatrix}(\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & (\sqrt{\lambda_s})^{-1} & & & & & & \\ & & & (\sqrt{\mu_1})^{-1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & (\sqrt{\mu_t})^{-1} & & & \\ & & & & & & e & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & e\end{bmatrix},$$

则

$$P^*AP=\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

假设有 $B\in\Omega^{n\times n}$,B 非奇异,使得

$$B^*AB=\begin{bmatrix} I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{t_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而 $s_1<s$,令

$$R_1=B^{-1}P=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{11}^* & R_{21}^* \\ R_{12}^* & R_{22}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{s_1} & 0 \\ 0 & -I_{t_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}. \qquad (**)$$

对 R_{11},因为行数 s_1 小于列数 s,据[4](“体上任意矩阵等价于一个对形矩阵”)有:$0\neq X_0\in\Omega^{s\times 1}$,使 $R_{11}X_0=0$.

将(**)式左乘$[\overline{X}'_0,0']$,右乘 $\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得:$0<\overline{X}'_0X_0=-\overline{X}'_0R_{21}^*R_{21}X_0\leqslant 0$. 因此 $s_1\geqslant s$,同理可证 $s\geqslant s_1$. 所以 $s=s_1$. 在体上左(右)乘可逆矩阵不变矩阵的秩. 故 $t_1=t=$秩$(A)-s$.

推论 2 设 $A,B\in SC_n(\Omega)$,则$\exists$ $C\in\Omega^{n\times n}$,C 非奇异,使得 $A=C^*BC$,当且仅当 A 与 B 有相同的秩和惯性指标.

参考文献:

[1] 居伯埙. 强 P 除环上方阵的酉相似理论(Ⅰ)[J]. 数学研究与评论, 1987, 3:393—401.

[2] 居伯埙. 强 P 除环上方阵的酉相似理论(Ⅱ)[J]. 数学研究与评论, 1988, 1: 11—21.

[3] Jacobson N. *Basic Algebral* [M]. 1974, 291—293.

[4] 谢邦杰. 环与体上矩及两类广义 Jordan 形式 [J]. 吉林大学学报(自然版), 1(1977).

Several Theorems of Self-Conjugate Matrices over the Stronger P-Division Rings

LI Qi-sheng

(Dept. of Math., Jishou University, Hunan 416000)

Abstract: In this paper, we prove that if Ω is a stronger P-division ring, then $R=\{a\,|\,a\in\Omega,\ \overline{a}=a\}$ must be a real closed field. Thus some famous results involving self-conjugate matrices, positive definite self-conjugate matrices in the ordinary complex matrix theory are generalized to self-conjugate matrices over Ω.

Key words: stronger P-division rings; real closed fields; self-conjugate matrices.