第20卷第1期
2000年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 20 No. 1
Feb. 2000

多柔体系统动力学符号演算的研究*

冯 力，叶尚辉，刘明治
（西安电子科技大学电子机械学院，西安 710071）

摘 要：多柔体系统动力学涉及繁杂的数学运算，对系统动力学方程和系数矩阵进行手工推导是低效而不可靠的. 采用数值化方法进行系统动力学分析将包括许多虚运算和重复计算，使得计算效率和精度受到了影响. 同时对约束和外力的变化适应性较差. 本文在通用计算机符号演算软件 MATHEMATICA 环境下，研究了多柔体系统动力学的计算机符号演算方法，提出将多柔体系统动力学建模和数值分析的问题在 MATHEMATICA 环境中一体化解决，并通过实践说明这一方法是可行的和有效的.

关键词：多柔体系统动力学；计算机符号演算；MATHEMATICA.
分类号：AMS(1991) 68Q40/CLC O313.7
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0143-06

1 引 言

多柔体系统动力学在建模方法上继承了多刚体系统动力学的思想，是多刚体系统动力学的自然延伸，而在处理柔性效应时引入了有限元法，是变形力学的拓广[1]. 因此多柔体系统动力学建模，除具有多刚体系统动力学建模的特点外，还由于有限元法的引入，使得系统自由度数大大增加，其动力学方程系数和动力学系统参量的求解规模变得更为庞大. 有限元单元系数矩阵的推导因需要进行复杂的体积分运算而变得相当繁杂，对高次单元的推导人工恐难胜任，而且其效率、可靠性均无法保证. 采用数值化方法进行多柔体系统动力学分析时，每一时刻的建模需从最初开始，使得在数值建模过程中包括了许多虚运算和重复计算，效率和精度受到了影响. 同时对约束和外力的变化适应性较差. 在这一形势下，计算机符号演算(Symbolic Computation)受到关注[2].

早期的多体系统动力学符号演算研究是以多刚体系统为对象的，直到进入 90 年代，国外学者在对大型柔性航天器多柔体动力学方程的推导时，采用了计算机符号演算. 多柔体系统动力学符号演算通常可采用两种方法. 一是使用某种高级语言，如 C、Fortran、Pascal 等编写符号演算程序. 二是选用某种通用符号演算软件，如 FORMAC、MACSYMA 等来编制符号演算程序. 前者的优点在于所编写的程序仅依赖于计算机环境，而不需要特殊的软件支撑. 其缺点是在编写时要进行符号演算基本运算的开发，工作量较大，编程效率低. 后者的优点在于编制

* **收稿日期**：1996-07-01
作者简介：冯 力(1963-)，男，陕西西安人，博士生.

软件效率高，而缺点是需要相应的软件环境支持. 这两种方法的优劣目前尚无定论，但随着通用计算机符号演算软件的不断成熟，采用第二种方法进行多柔体系统动力学符号演算可能更为恰当.

本文在通用计算机符号演算软件 MATHEMATICA[3]环境下，研究了多柔体系统动力学的计算机符号演算方法，提出将多柔体系统动力学建模和数值分析的问题在 MATHEMATICA 环境中一体化解决，并通过实践说明这一方法是可行的和有效的.

二 多柔体系统动力学符号演算

根据带乘子的拉格朗日方程，使用非独立的广义坐标所得到的多柔体系统动力学方程可写为下列形式[1]

$$M\ddot{q} + C_q^T\lambda - Q^A = 0, \tag{1a}$$

$$C(q,t) = 0, \tag{1b}$$

其中 q 是 n 维广义坐标，$\ddot{q}$ 是 n 维广义加速度，λ 为 m 维拉格朗日乘子，$C(q,t)$是 m 个运动约束矢量，C_q 为 $m\times n$ 维雅可比矩阵，M 是 $n\times n$ 维系统质量阵，$Q^A=Q_e+Q_v\text{-}Kq$ 为作用力列阵，Q_e 为广义外力，Q_v 为速度二次矢量，K 为刚度矩阵. 其详尽的数学描述见文献[1,4].

采用微分几何与向后差分相结合的数值方法[4]，求解(1)式的离散公式为

$$G(Xn) = \begin{bmatrix} U_0^T(X_n - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_{n-i} - h\beta_k g_n) \\ F(X_n) \end{bmatrix} = 0, \tag{2}$$

其中 U_0 为 $2(n\text{-}m)$维空间的基底，$X=\begin{bmatrix}\dot{q}^T & q^T\end{bmatrix}^T$，$F(x)=\begin{bmatrix}C_q\dot{q}+C_t \\ C\end{bmatrix}$，$\alpha_i$，$\beta_k$ 为系数. $h=t_i\text{-}t_{i-1}$为时间步长. k 为差分阶次. $g=\dot{X}$.

通过 Newton-Raphson 方法解(2)式就可得到多柔体系统动力学方程(1)的数值解.

在(1)式中，系统质量矩阵和刚度矩阵是由系统中各体质量矩阵和刚度矩阵所组成. 对于柔体而言，体质量矩阵和刚度矩阵是有限单元质量矩阵和刚度矩阵的集总. Newton-Raphson 方法的使用需计算 $G(X_n)$的雅可比矩阵. 这些与雅可比矩阵和作用力列阵一样，从数学角度来讲，均为矩阵的和、乘积、微分及积分. 而这些数学运算在通过计算机符号演算软件 MATHEMATICA 中，可以使用 MATHEMATICA 所提供的函数或模式来完成. 同时整个建模过程的高度规格化，为计算机符号演算提供了便利的条件.

多柔体系统动力学建模和数值分析一体化思想是将多柔体系统动力学分析分为两个阶段. 首先进行多柔体系统动力学符号演算建模，得到动力学方程精确的符号表达最简形式，之后符号演算求出数值求解所需公式的显式表达，然后将数值代入公式进行数值计算，最后将结果以数据和图形方式输出. 运动约束和外力采用符号显式定义，以提高对其变化的适应性. 由于通用计算机符号演算软件 MATHEMATICA 具有符号演算、数值计算和图形的功能，所以上述计算能够在 MATHEMATICA 环境中一体化完成.

值得注意的是，为了获得有限单元质量矩阵，需求得如下七个常矩阵[4]

$$S_0 = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} S^{ij} \mathrm{d} v^{ij}, \tag{3a}$$

$$S_{lk} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} S_l^{ijT} S_k^{ij} \mathrm{d} v^{ij}, \quad l,k = 1,2,3, \tag{3b}$$

其中 ρ^{ij}为单元质量密度，V^{ij}为单元体积，S^{ij}为单元形函数，S_l^{ij}，S_k^{ij} 为单元形函数的第 l，k 行.

由于单元形函数随单元类型不同形式上变化很大，故其推导不便直接在多柔体系统动力学分析时进行，而需事先符号演算得出不同单元的这七个常矩阵，在多柔体系统动力学分析时使用. 这一工作可作为多柔体系统动力学建模的预处理.

多柔体系统动力学建模和数值分析一体化的步骤是：对各体有限单元的质量矩阵和刚度矩阵进行符号演算，之后对单元系数矩阵进行集总获得体系数矩阵，通过体系数矩阵得到系统质量矩阵和刚度矩阵；符号演算作用力列阵和雅可比矩阵，就可得到系统动力学模型精确的符号表达最简形式；符号演算(2)式和使用 Newton-Raphson 方法求解所需的雅可比矩阵；代入数值进行数值化计算，将结果以数据和图形的方式输出.

基于上述思想，一个 MATHEMATICA 多柔体系统动力学符号演算程序包 SCDAMS (Symbolic Computation for Dynamic Analysis of Multibody Systems)的组成如图 1 所示. 它由两部分组成：符号演算建模部分 SCModel 和数值计算部分 SCNum.

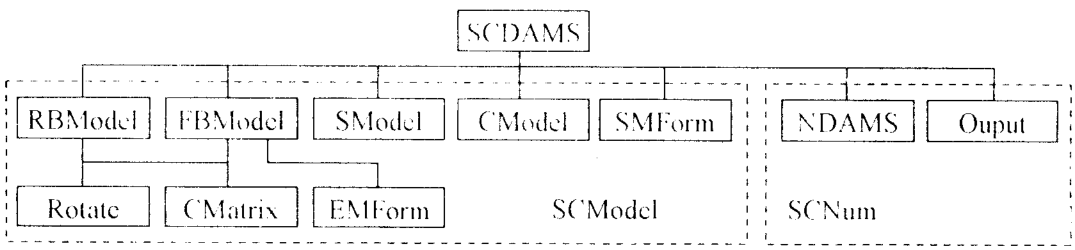

图 1　SCDAMS 的组成结构

符号演算建模部分 SCModel 将根据多柔体系统的初始数据，按拉格朗日方法完成多柔体系统动力学的符号演算建模，最终得到最简形式的多柔体系统动力学方程. 它由下列 MATHEMATICA 符号演算程序包组成：RBModel 完成多柔体系统中刚体的符号演算建模；FBModel 完成多体系统中柔体的符号演算建模；SModel 完成多柔体系统动力学方程(1a)式的建模；CModel 完成多柔体系统运动约束的建模；SMForm 形成所需的多柔体系统动力学方程；Rotate 形成旋转矩阵和各种变换矩阵；CMatrix 形成多柔体系统动力学建模所需的常矩阵；EMForm 形成有限元单元质量矩阵.

数值计算部分 SCNum 将根据 SCModel 的结果，对多柔体系统动力学方程进行数值求解，最终按需要输出数据和图形. 它包括下列 MATHEMATICA 符号演算程序包：NDAMS 进行多柔体系统动力学方程数值计算所需公式的符号演算和数值求解；Output 输出数据和图形.

这样整个多柔体系统动力学符号演算环境将由 MATHEMATICA 软件、SCDAMS、和推导质量矩阵的七个常矩阵的预处理程序组成.

根据SCDAMS的组成结构，一个实验性MATHEMATICA符号演算程序包SCDAMS的源程序为：

```
BeginPackage["SCDAMS `"]
SCDAMS::usage="SCDAMS is a package of Symbolic Computation for Dynamic Analysis of Multibody Systems."
Begin["`Private `"]
(*System、Body、Constraint、NumericalSolver分别为系统、体、约束和数值计算参数表*)
SCDAMS[System-List,Body-List,Constraint-List,NumericalSolver-List]:=Block[{},
    (*SBnum、St、SMtype分别为系统中体数、时间变量和系统模型形式*)
    SBnum=System[[1]];St=System[[2]];SMtype=System[[3]];
    Binformation=Array[body,SBnum];
    (*SGq、SGV、SGa分别为系统的广义坐标、广义速度和广义加速度*)
    For[i=1,i<=SBnum,i++,
        SGq=Join[SGq,Body[[i,3]]];SGV=Join[SGV,Body[[i,4]]];SGa=Join[SGa,Body[[i,5]]];
    (*根据体类型选择建模模块*)
    Needs["RBModel `"];Needs["FBModel `"];
    For[i=1,i<=SBnum,i++,
        Btype=Body[[i,2]];Bparameter=body[[i]];
        If[Btype==0,Binformation[[i]]=RBModel `RBModel[St,Bparameter]];
        If[Btype==1,Binformation[[i]]=FBModel `FBModel[St,Bparameter]];
    (*多柔体系统动力学方程(1a)式建模*)
    Needs["SModel `"];Sinformation=SModel `SModel[Binformation];
    (*系统运动约束建模*)
    Needs["CModel `"];Cinformation=CModel `CModel[SGq,SGv,SGa,St,Constraint];
    (*按需要计算和输出*)
    Needs["SMForm `"];Needs["Output `"];
    (*数值计算并输出*)
    If[SMtype==0,Sm=SMForm `SMForm2[SGq,SGv,SGa,Sinformation,Cinformation];
        Needs["NDAMS `"];NDAMS `NDAMS[St,Sm,NumericalSolver]];
    (*按(1)式形式输出*)
    If[SMtype==1,Sm=SMForm `SMForm1[SGq,SGv,SGa,Sinformation,Cinformation];Output1[St,
    Sm]];
    (*按增广形式输出*)
    If[SMtype==2,Sm=SMForm `SMForm2[SGq,SGv,SGa,Sinformation,Cinformation];Output2[St,
    Sm]];
End[]
EndPackage[]
```

三　多柔体系统动力学符号演算的实践

根据上述方法，在两个方面进行了多柔体系统动力学符号演算的实践：

1. 多柔体系统动力学分析所需常矩阵的符号演算.

多柔体系统动力学分析所需的七个常矩阵是多柔体系统动力学分析的基础. 在 MATHEMATICA 环境下,对常用的梁单元和匀质三角形壳单元质量矩阵的常矩阵的进行了符号演算,编写了通用的 MATHEMATICA 符号演算程序包. 推导梁和匀质三角形壳单元质量矩阵的常矩阵时,使用该程序包,可在 MATHEMATICA 环境下有效而可靠地计算出所需的结果. 对二节点十二自由度空间梁单元质量矩阵和三节点十八自由度三角形壳单元质量矩阵的常矩阵进行了符号演算. 在微机 486/66,MATHEMATICA1. 2 版环境下,运算时间分别为 71. 84 秒和 575. 51 秒,经与文献和手工推导的结果对比,两者的结果完全吻合. 详细的描述和结果见文献[4].

2. 多柔体系统动力学分析的符号演算.

使用实验性 MATHEMATICA 通用程序包 SCDAMS,在 MATHEMATICA 环境下成功地完成了图 2 所示算例的多柔体系统动力学符号演算建模. 在图 2 中,多柔体系统是一个刚柔混合体的旋臂梁,体 1 为一刚性臂,体 2 是其一端固接在刚性臂上的柔性梁,刚性臂绕定轴转动. 刚性臂长为 l1,质量为 m1,梁截面积为 a1,驱动力矩为 T. 柔性臂长是 l2,质量为 m2,梁截面积为 a2. 将柔性梁离散为一个梁单元进行符号演算,在微机 486/66,MATHEMATICA1. 2 版环境下,将此二维问题按三维问题进行符号演算建模,在化简的情况下运算时间为 1318. 15 秋. 按二维问题进行符号演算建模,在化简的情况下运算时间为 195. 1 秒. 在未化简的情况下运算时间为 10. 76 秒. 将所得到的动力学方程经数值求解后,其数值解与文献[5]的结果相吻合.

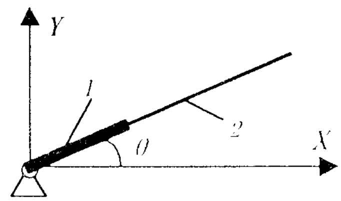

图 2　旋臂梁

多柔体系统动力学符号演算结果可以通过三个途径加以验证. 第一是将符号演算结果与手工推导的结果进行对比. 第二是将符号演算结果与数值化方法的结果进行对比. 第三是将符号演算结果与实验结果进行对比. 但是由于多柔体系统的复杂性,其实验结果不易获得,第三种方法目前难以实现. 对于简单算例和多柔体系统动力学分析所需单元矩阵的符号演算,由于文献提供和手工推导容易进行,所以采用第一种方法验证较为合适. 由于数值化方法较符号演算方法成熟,采用第二种方法进行符号演算结果的验证可能是较佳的选择.

通过多柔体系统动力学符号演算的实践得到,多柔体系统动力学分析所需单元常矩阵的符号演算可以避免手工推导的繁杂、费时和不可靠,具有很高的实际应用价值. 多柔体系统动力学分析符号演算方法是可行的,在效率和精度上具有数值化方法无法比拟的优势. 尽管二维问题可以作为三维问题的特例,但实践中发现两者符号演算时间相差很大,二维问题按二维进行符号演算明显节省符号演算时间. 所以多柔体系统动力学符号演算建模应将二维和三维问题分别进行处理. 同时发现符号演算建模过程中,符号演算结果的化简是主要的耗时部分,在符号演算实现技术上加以注意. 恰当选择化简时机,可有效地提高符号演算效率. 对多柔体系统动力学符号演算与数值方法的结合,以及符号一解析一数值(SAN. Symbolic－Analytical－

Numerical)方法等问题还有待今后进一步的研究.

参考文献:

[1] Shabana A A. *Dynamics of multibody systems* [M]. John Wiley & Sons, 1989.

[2] 朱 明. 多体系统动力学中的几个问题 [M]. 见:黄文虎,陈滨,王照林主编,一般力学(动力学、振动与控制)最新进展,科学出版社,1994.

[3] 孙魁明,张海彤编译,渠川璐审校. Mathematica 工具软件大全 [M]. 中国铁道出版社,1994.

[4] 冯 力. 多柔体系统动力学数值方法和符号演算 [D]. 西安电子科技大学硕士论文,1996. 1.

[5] 潘振宽,洪嘉振. 刚弹惯性耦合下变形体动力学呼应分析 [J]. 应用力学学报,1994, 11(1):

The Study on Symbolic Computation for Dynamics of Flexible Multibody Systems

FENG Li, YE Shang-hui, LIU Ming-zhi

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract: This paper describes the symbolic computation for dynamics of flexible multibody systems in the environment of MATHEMATICA, and presents integrative solution that treats the problem of dynamic modeling for and numerical analysis for flexible multibody systems with MATHEMATICA. Its availability and effectiveness are illustrated by practices.

Key words: dynamics of flexible multibody systems; computer symbolic computation; MATHEMATICA.