第20卷第1期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 1
2000年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2000

化简Fuzzy逻辑函数直接方法的注记*

杨纶标， 罗文标
(华南理工大学，广州 510641)

摘 要：本文改进了[1]给出的化简 Fuzzy 逻辑函数的方法.首先给出广义互补项的概念，并应用它证明可删去项的充要条件，然后给出了不满足定理条件的问题解决办法，从而得到一种既方便又能将 Fuzzy 逻辑函数化到最简的方法.

关键词：Fuzzy 逻辑函数；化简；广义互补项.
分类号：AMS(1991) 03E, 49K/CLC O159
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)01-0149-04

1 预备知识

定义 1 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x)$ 为 Fuzzy 逻辑函数，其中变量 x_i 及其否定 $\bar{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 叫做字，记为 P_i；称 $\bar{x}_i$ 是 x_i 的补元，反之亦然，即 x_i 也是 $\bar{x}_i$ 的补元；字的合取式 $P_1P_2\cdots P_s(1\leqslant s\leqslant n)$ 称为字组或项，用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示.

注 因变量 x_i 可恒取 1 或 0，所以 1 和 0 也称为字. 在字组的定义中，$s=1$，字组为 $1P_1$.

定义 2 在字组中，不存在补元的字，称为单字；不含互补对$(x_i\bar{x}_i)$的字组，称为单项；至少含一互补对的字组，称为互补项；所有变量均出现的互补项，称为互补最小项.

例如在$[0,1]^4$上，$\alpha=x_1x_2\bar{x}_3$，$\beta=x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$，$\gamma=x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$，其中，$\alpha$ 中的字均不存在补元，故都是单字，从而 α 是单项；β 项含互补对，故是互补项，而项中 $x_2\bar{x}_4$ 均不存在补元，所以均是单字；γ 项含互补对且含所有变量，因此 γ 是互补最小项.

定义 3 在 Fuzzy 逻辑函数 $f(x)$ 中，若变量任何赋值，均有 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$（简记 $f\geqslant\frac{1}{2}$），则称 f 为 Fuzzy 真；若变量任何赋值，均有 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}$，则称 f 为 Fuzzy 假.

定理 1 Fuzzy 逻辑函数 $f(x)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ 为 Fuzzy 真的充要条件是任意的 $x\in[0,1]^n$，总有两项满足 $\alpha_i=1-\alpha_j$，$1\leqslant i,j\leqslant m$，这时称 α_i 与 α_j 为广义互补项（简称 α_i 与 α_j 互补）

注 互补的两项 α_i 与 α_j 可以不固定.

例如 $f=\bar{x}_1x_2+x_1x_2+x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_2$ 为 Fuzzy 真.

证明 因为 x_1 与 $\bar{x}_1$，x_2 与 $\bar{x}_2$ 互补，所以不妨设 $x_1>\bar{x}_1$，$x_2>\bar{x}_2$.（其它情况类似）.

---

* 收稿日期：1996-10-31
基金项目：国家自然科学基金资助项目(59775081)
作者简介：杨纶标(1940-)，男，广东蕉岭县人，华南理工大学教授.

若 $x_2>x_1$，则 $\bar{x}_1x_2=1-x_1x_2$，即 $\alpha_1=1-\alpha_2$，

若 $x_1>x_2$，则 $x_1\bar{x}_2=1-x_1x_2$，即 $\alpha_3=1-\alpha_2$，

因此，在 f 中总有两项满足 $\alpha_i=1-\alpha_j$，所以 f 为 Fuzzy 真.

定理 2[2] 对变量任何赋值均有

$$\alpha=\alpha(x_i+x_i'),x_i 与 x_i' 均不在 \alpha 中 \tag{1}$$

的充要条件是(1)α 为互补项，(2)x_i 与 x'_i 互补.

推论 1 设字组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(1<s<n)$ 不在 α 中，那么对变量 x 的任何赋值，下式

$$\alpha(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=\alpha \tag{2}$$

成立的充要条件是(1)α 为互补项，(2)$\alpha_1+\cdots+\alpha_s$ 为 Fuzzy 真.

定义 4 若对变量 x 的任一组值，恒有 $\alpha(x)\leqslant\beta(x)$（简写 $\alpha\leqslant\beta$），则称 α 含于 β（或称 β 包含 α）.

若 α 含于 β 且存在 x 的值，使 $\alpha(x)<\beta(x)$（简记 $\alpha<\beta$），则称 α 真含于 β.

命题 1 α 含于 β 的充要条件是 β 中的字均出现在 α 中.

命题 2 α 真含于 β 的充要条件是 β 中的字均出现在 α 中且 α 中至少有一字不在 β 中.

2 简单析取式及其互素项

定义 5 若 Fuzzy 逻辑函数 $f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ 中的任何一项均不含于其它项，则称 f 为简单析取式.

定义 6 设 α 与 β 互不包含，若存在异于 α 的项 γ，使得

$$\alpha\leqslant\gamma 及 \alpha+\beta=\gamma+\beta, \tag{3}$$

则称 α 与 β 并不互素，否则，称 α 与 β 互素.

定理 3[2] 设 α 是简单析取式的单项，则 α 与其它各项互素.

根据最简式定义[3]和定理 3 知道，简单析取式中的单项，就是最简式中的项，因此进行化简时，只需考虑互补项便可.

3 Fuzzy 逻辑函数的最小化定理

定理 4 在简单析取式 f 中，互补项 α 中的单字 x_i（或 $\bar{x}_i$）可删去的充要条件是：

(1) 存在 β 项且它有单字与 α 中的 x_i（或 $\bar{x}_i$）互补，且

(2) β 中除互补的单字外，其余的字均出现在 α 中.

证明 *必要性*. 设 $\alpha=\gamma x_i$ 且 x_i 可删去，则 $f=\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_s=\gamma+\beta_1+\cdots+\beta_s$. 因 α 为互补项，x_i 是单字，故 γ 也是互补项，根据定理 2，上式变为

$$f=\gamma+\beta_1+\cdots+\beta_s=\gamma(x_i+\bar{x}_i)+\beta_1+\cdots+\beta_s=\alpha+\gamma\bar{x}_i+\beta_1+\cdots+\beta_s.$$

显然 $\gamma\bar{x}_i$ 含于某项，不妨设为 $\beta(\beta\leqslant\alpha+\beta_1+\cdots+\beta_s)$，即 β 中的字均在 $\gamma\bar{x}_i$ 中，又知 β 中至少有一字（记 x_i'）不在 α 中（否则 α 被 β 删去），令 $\beta=\beta'x_i'$，那么 $\beta'x_i'$ 中的字均在 $\gamma\bar{x}_i$ 中，因 x_i' 不在 α 中，即不在 γ 中，所以 x_i' 就是 $\bar{x}_i$，且 β' 在 γ 中（即 β 中除互补字 $\bar{x}_i$ 外，其余字均在 α 中）. 又由 α

$=\gamma x_i$，知 x_i 不在 γ 中，故不在 β' 中，所以 $\overline{x}_i$ 是单字.

充分性. 设存在 β 项且它有单字 $\overline{x}_i$，并令 $\beta=\beta'\overline{x}_i$，互补项 $\alpha=\alpha' x_i$（x_i 为单字），如果 β' 中的字均在 α' 中，则 $\alpha'\overline{x}_i\leqslant\beta'\overline{x}_i$，于是有 $\alpha+\beta=\alpha' x_i+\alpha'\overline{x}_i+\beta'\overline{x}_i=\alpha'(x_i+\overline{x}_i)+\beta'\overline{x}_i$. 由 α 是互补项，知 α' 也是互补项. 根据定理 2，得到 $\alpha+\beta=\alpha'+\beta$，其中 α' 是 α 删去 x_i 后的项. □

注意：(1) 定理所述 β 项，要求 $\beta\leqslant f$，所以它可以是 f 中的项，也可以不是，即也可以用如下方法构成：若总有两项有单字（或字组）互补，则除这些互补的字外，其余字构成的字组，可作为 β 项. 因为如果这个字组是互补项，按定理 2，显然有 $\beta\leqslant f$；如果是单项，则它可与 α 中的互补对一起组成 β 项，也满足 $\beta\leqslant f$.

(2) 根据定理 2，互补项可以化为互补最小项. 所以 β 中除互补的字外，其余字中，若还有字不出现在 α 中，则将 α 化为互补最小项，再进行化简. 如果这时还有字不满足化简的条件，那么便是不可再简化了.

例 1 将 $f=x_1x_2\overline{x}_2x_3+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3+x_2\overline{x}_3x_4+\overline{x}_2\overline{x}_4$ 化简.

解 对互补项 $\alpha=x_1x_2\overline{x}_2x_3$，存在单项 $\beta=\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$，使 x_1 可删去. 又 f 中的另两项有单字（x_4 与 $\overline{x}_4$）互补，其余字构成的字组记为 β_1（即 $\beta_1=x_2\overline{x}_2\overline{x}_3$），又可作为定理 4 中的 β 项，使 α 中的 x_3 删去，于是，有最简式 $f=x_2\overline{x}_2+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3+x_2\overline{x}_3x_4+\overline{x}_2\overline{x}_4$.

例 2[4] 求下面 Fuzzy 逻辑函数的最简式

$$f=x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3+\overline{x}_1x_3\overline{x}_5+x_2x_3x_5+x_1\overline{x}_1x_2x_4.$$

解 这里各项不满足定理 4 的条件，即 β 项中，除互补字外的其余字不全出现在互补项 $\alpha=x_1\overline{x}_1x_2x_4$ 中，这时可将互补项 α 化为互补最小项，并删去含于其它项的项，再按定理 4，便可将 α 中的 x_4 删去，得最简式为 $f=x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3+\overline{x}_1x_3\overline{x}_5+x_2x_3x_5+x_1\overline{x}_1x_2$.

定理 5 在简单析取式中，互补项 γ 可删去的充要条件是：

(1) 式中总有两项有单字（或字组）互补，且

(2) 除这些互补的字外，其余字均在 γ 中.

证明 必要性. 设互补项 γ 可删去，式子中其余项为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，则

$$\gamma\leqslant\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m \tag{4}$$

因 γ 是简单析取式的项，故 γ 不含于其它项，即每一项至少有一字不在 γ 中出现，设不在 γ 中出现的 α_i 的字构成的字组（记 α_i'），那么

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\geqslant(\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_m')\gamma \tag{5}$$

若要(4)式成立，则(5)式右边的合取式中的两个因式只能取 γ，即 $(\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_m')\gamma=\gamma$，从而 $\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_m'$ 必须为 Fuzzy 真，γ 为互补项，因此 $\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_m'$ 中总有两项满足 $\alpha_i'=1-\alpha_j'$，即 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ 中总有两项有单字（或字组）互补，且两项中除所有互补的字外，其余字均在 γ 中.

充分性. 只要将上述证明反推，便可得到结果.

例 3 求 $f=x_2x_3+x_1\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_2x_2+x_1\overline{x}_1x_3\overline{x}_3x_4$ 的最简式.

解 用 α_i 表示第 i 项. α_1 与 α_2 两项有互补的单字（$x_2\overline{x}_2$），且除这互补的字外，两项其余字均出现在 α_4 中，按照定理 5，α_4 可被删去. 于是，得到最简式 $f=x_2x_3+x_1\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_2x_2$.

例 4 求 $f=x_1x_3+\overline{x}_1\overline{x}_2+\overline{x}_1x_2+x_3x_4\overline{x}_4$ 的最简式.

解 α_1 与 α_2，α_2 与 α_3 都有单字互补，且除 $x_1,\overline{x}_1$、$x_2,\overline{x}_2$ 这些互补的字外，其余字 x_3 出现在

α_4 中，根据定理 5，α_4 可被删去，于是得最简式 $f=x_1x_3+\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2$.

注意(1)应选多少对有互补的单字的项呢？只要选出的项，除所有互补的单字外，其余字均在 γ 项中便可；(2)如果选出的项，除互补的单字外，没有其它变量，可认为其余字是 1，它出现在所有互补项中，所以式中的互补项均可被删去.

4 化简方法小结

(1) 求简单析取式. 将 Fuzzy 逻辑函数化为析取式，再略去含于其它项的项，便得简单析取式.

(2) 若式中有一 β 项的单字(如 x_i)与互补项 α 中的单字 $\bar{x}_i$ 互补，且除 x_i 外，其余字均出现在 α 中，则 α 中的 $\bar{x}_i$ 可被删去.

(3) 若式中总有两项有单字(或字组)互补，且除互补的字外，其余字有如下两种情况：①其余字均出现在另一互补项 γ 中，则 γ 可被删去；②其余字中，有一单字与互补项 γ 的单字互补，且除这一互补字外，其它字均出现在 γ 中，则可删去 γ 中与之互补的字.

(4) 若互补项 α 有单字与 β 项的单字互补，但 β 项中除互补的字外的其余字还有字不出现在互补项 α 中，则将 α 化为互补最小项，再按方法(2)化简.

去掉所有可删去的字和项，便得最简式.

参考文献：

[1] 杨纶标. Fuzzy 函数并不可约元再化简 [J]. 应用数学，1995，1.

[2] 杨纶标，高英仪. 模糊数学原理及应用 [M]. 广州：华南理工大学出版社，1993.

[3] 亚伯拉罕 K，塞缪尔 C L. 模糊开关和自动机理论和应用(楼世博译) [M]. 上海：科学技术出版社，1984.

[4] 董长清. 求 Fuzzy 逻辑函数最简式的一种新方法 [J]. 兰州大学学报(模糊数学专辑)，1996，**32**：324—326.

A Note on the Method to Simplify Fuzzy Logic Functions

YANG Lun-biao， LUO Wen-biao

(South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract: In this paper, the method that immediately simplibies fuzzy logic functions is improved. Firstly, the concept of the generalized complementary terms is established, and the necessary and sufficient conditions that can eliminate the terms are proved. Secondly, the method to solve question that is not fiting the condition of theorem is given. And so the method to reduce fuzzy logic functions to its simplest forms is obtaimed.

Keywords: fuzzy logic function; minimum; generalized complementary term.