第20卷第2期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

一类具奇异右端项的伪抛物方程的摄动问题*

李风泉[1]， 徐传芳[2]

(1. 曲阜师范大学数学系，山东 273165； 2. 临沂师专数学系，山东 276005)

摘　要：本文讨论了一类具奇异右端项的伪抛物方程的初边值问题的摄动，证明了摄动问题广义解的存在性及极限性态，并得到了当 ε 趋于零时，摄动问题的解在一定意义下收敛于原问题的解.

关键词：伪抛物方程；摄动；极限性态.

分类号：AMS(1991) 35K70/CLC O175.2

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0243-05

1　引言和主要结果

设 Ω 是 $R^n(n=2,3)$ 中有界区域且包含原点，$\partial\Omega=\Gamma$，充分光滑，$Q=\Omega\times(0,T)$，T 为固定正数.

对 $\forall\, v\in L^2(0,T)$，考虑下面的初边值问题.

$$
(\mathrm{I})\quad\begin{cases}(1-\Delta)\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y=v(t)\delta(x), & \text{在 } Q \text{ 中},\\ y=0, & \text{在 } \Gamma\times(0,T) \text{ 上},\\ y(x,0)=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}
$$

在这里 $\delta(x)$ 是单位质量集中在原点的 Dirac 函数.

对 $\forall\,\varepsilon>0$，固定 $v_\varepsilon\in L^2(0,T)$，考虑(I)的摄动问题，

$$
(\mathrm{I}_\varepsilon)\begin{cases}(1+\varepsilon\Delta^2)\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\Delta^2 y_\varepsilon-\Delta(\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}+y_\varepsilon)=v_\varepsilon(t)\delta(x), & \text{在 } Q \text{ 中}\\ y_\varepsilon=\Delta y_\varepsilon=0, & \text{在 } \Gamma\times(0,T) \text{ 上},\\ y_\varepsilon(x,0)=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}
$$

问题(I)，(I_ε)在 $L^2(Q)$ 中的唯一弱解 $y=y(t;v)$ 及 $y_\varepsilon=y_\varepsilon(t;v_\varepsilon)$ 分别用格林公式

$$
\int_Q y\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T v(t)\varphi(0,t)\mathrm{d}t,\quad \forall\,\psi\in L^2(Q), \tag{1.1}
$$

$$
\int_Q y_\varepsilon\psi_\varepsilon\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T v_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon(0,t)\mathrm{d}t,\quad \forall\,\psi_\varepsilon\in L^2(Q). \tag{1.2}
$$

* 收稿日期：1997-01-28

基金项目：山东省自然科学基金青年基金资助

作者简介：李风泉(1969-)，博士，副教授.

由转置方法所定义，而 $\varphi(x,t)=\varphi(x,t;\psi)$，$\varphi_\varepsilon=\varphi_\varepsilon(x,t)=\varphi_\varepsilon(x,t;\psi_\varepsilon)$，分别是问题(Ⅰ)，($\mathrm{I}_\varepsilon$)的伴随问题

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}-(1-\Delta)\dfrac{\partial\phi}{\partial t}-\Delta\phi=\psi, & \text{在 } Q \text{ 中},\\ \phi=0, & \text{在 } \Gamma\times(0,T)\text{上},\\ \phi(x,T)=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

$$(\mathrm{II}_\varepsilon)\quad\begin{cases}-(1+\varepsilon\Delta^2)\dfrac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\Delta^2\phi_\varepsilon+\Delta\dfrac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial t}-\Delta\phi_\varepsilon=\psi_\varepsilon, & \text{在 } Q \text{ 中},\\ \phi_\varepsilon=\Delta\phi_\varepsilon=0, & \text{在 } \Gamma\times(0,T)\text{上},\\ \phi_\varepsilon(x,T)=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

本文将讨论问题(Ⅰ)，(Ⅱ)的摄动问题(I_ε)，(II_ε)的解当 $\varepsilon\to0$ 时的极限性态，在抛物双曲及椭圆情况情形已在[3]，[4]，[5]中讨论过，这里我们将参照[1]中处理伪抛物方程等值面边值问题的解的极限性态的方法来讨论伪抛物方程的摄动问题，主要结果如下：

定理 1（定理 1′） 当 $\varepsilon\to0$ 时，若

$$v_\varepsilon\to v,\text{在 } L^2(0,T) \text{ 中弱(或强)收敛}, \tag{1.3}$$

则有

$$y_\varepsilon(t;v_\varepsilon)\to y(t;v) \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中弱(或强)收敛}. \tag{1.4}$$

定理 2（定理 2′） 当 $\varepsilon\to0$ 时，若

$$\psi_\varepsilon\to\psi \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中强(或弱)收敛}, \tag{1.5}$$

则有

$$\varphi_\varepsilon(t;\psi_\varepsilon)\to\varphi(t;\psi) \text{ 在 } H^1(0,T;H^2(\Omega)) \text{ 中强(或弱)收敛}. \tag{1.6}$$

特别地，

$$\varphi_\varepsilon(0,T;\psi_\varepsilon)\to\phi(0,T;\psi) \text{ 在 } H^1(0,T) \text{ 中强(或弱)收敛}. \tag{1.7}$$

2 定理 1 和定理 2 的证明

由伴随性，只需证明定理 2(见[1])。

引理 2.1[1] 对$\forall\ \psi\in L^2(Q)$，(Ⅱ)存在唯一的解 $\varphi\in H^1(0,T;H^2(\Omega))$且满足

$$\|\varphi(t;\psi)\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}\leqslant C\|\psi\|_{L^2(Q)}, \tag{2.1}$$

特别地，

$$\|\varphi(0,t;\psi)\|_{H^1(0,T)}\leqslant C\|\psi\|_{L^2(Q)}, \tag{2.2}$$

在这里 C 表示常数.

引理 2.2 对$\forall\ \varepsilon>0$，$\forall\ \psi_\varepsilon\in L^2(Q)$，($\mathrm{II}_\varepsilon$)存在唯一的解 $\varphi_\varepsilon\in H^1(0,T;H^4(\Omega))$且

$$\|\varphi_\varepsilon(t;\psi_\varepsilon)\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}\leqslant C\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(Q)}, \tag{2.3}$$

特别地，

$$\|\varphi_\varepsilon(0,t;\psi_\varepsilon)\|_{H^1(0,T)}\leqslant C\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(Q)}, \tag{2.4}$$

在这里 C 表示与 ε 无关的正常数.

证明 存在唯一性可用 Galerkin 方法来证明，在这里略去证明，只作估计.

在(I_ε)两边,同乘以 φ_ε,可估计出

$$\| \varphi_\varepsilon(t;\psi_\varepsilon) \|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))} \leqslant C \| \psi_\varepsilon \|_{L^2(Q)}; \tag{2.5}$$

在(I_ε)两边同乘以 φ_ε',可估计出

$$\| \varphi_\varepsilon(t;\psi_\varepsilon) \|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leqslant C \| \psi_\varepsilon \|_{L^2(Q)}, \tag{2.6}$$

在这里 $\varphi_\varepsilon' = \frac{\partial \varphi_\varepsilon'}{\partial t}$;在($\mathrm{I}_\varepsilon$)两边同乘以 $\Delta\varphi_\varepsilon$,可估计出

$$\| \Delta\varphi_\varepsilon(t;\psi_\varepsilon) \|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqslant C \| \psi_\varepsilon \|_{L^2(Q)}; \tag{2.7}$$

在(I_ε)两边同乘以 $\Delta\varphi_\varepsilon'$,可估计出

$$\| \varphi_\varepsilon'(t;\psi_\varepsilon) \|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leqslant C \| \psi_\varepsilon \|_{L^2(Q)}, \tag{2.8}$$

其中 C 与 ε 无关.

由(2.5)—(2.8)知,

$$\| \varphi_\varepsilon(t;\psi_\varepsilon) \|_{H^1(0,T,H^2(\Omega))} \leqslant C \| \psi_\varepsilon \|_{L^2(Q)}, \tag{2.9}$$

因为 $n=2,3$,所以 $H^2(\Omega)$ 嵌入到 $C^0(\overline{\Omega})$,因此有(2.4)式成立.

由引理 2.1 和引理 2.2 的估计可知,证明定理 2,只需考虑 $\psi_\varepsilon=\psi,\psi\in C_0^\infty(Q)$,因为 $C_0^\infty(Q)$ 在 $L^2(Q)$ 中稠密.

只需证明下述结果.

引理 2.3 设 $\varphi_\varepsilon=\varphi_\varepsilon(x,t)=\varphi_\varepsilon(x,t;\psi)$ 为下述问题的解,

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} -(1+\varepsilon\Delta^2)\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\Delta^2\varphi_\varepsilon+\Delta\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t}-\Delta\phi_\varepsilon=\psi, & \text{在 } Q \text{ 中},\\ \varphi_\varepsilon=\Delta\varphi_\varepsilon=0, & \text{在 } \Gamma\times(0,T) \text{ 上},\\ \varphi_\varepsilon(x,T)=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases}$$

在这里 $\psi\in C_0^\infty(Q)$,则当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi \text{ 在 } H^1(0,T;H^2(\Omega)) \text{ 中强收敛}, \tag{2.10}$$

$$\varphi_\varepsilon(0,t;\psi) \to \varphi(0,t;\psi) \text{ 在 } H^1(0,T) \text{ 中强收敛}, \tag{2.11}$$

φ 为(I)的解.

证明 因为 $\psi\in C_0^\infty(Q)$,所以 φ 和 φ_ε 都是正则的,且由引理 2.2 知,

$$\| \varphi_\varepsilon \|_{H^1(0,T,H^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{2.12}$$

$$\| \varphi_\varepsilon(0,t;\psi \|_{H^1(0,T)} \leqslant C. \tag{2.13}$$

C 与 ψ 有关的常数,通过正则性,也有

$$\| \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial t} \|_{H^1(0,T,H^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{2.14}$$

$$\| \frac{\partial\varphi_\varepsilon(0,t;\psi)}{\partial t} \|_{H^1(0,T)} \leqslant C. \tag{2.15}$$

所以有

$$\| \varphi_\varepsilon \| H^2(0,T;H^2(\Omega)) \leqslant C, \tag{2.16}$$

$$\| \varphi_\varepsilon(0,t;\psi \|_{H^2(0,T))} \leqslant C. \tag{2.17}$$

另外,$\Delta\varphi_\varepsilon,\Delta\varphi_\varepsilon'$ 也是上述的解,且 ψ 分别被 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\psi'$ 替换,也有如下的估计,

$$\| \Delta\varphi_\varepsilon \|_{H^1(0,T,H^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{2.18}$$

$$\|\Delta\varphi_\varepsilon'\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}\leqslant C. \tag{2.19}$$

所以

$$\|\Delta\varphi_\varepsilon\|_{H^2(0,T;H^2(\Omega))}\leqslant C, \tag{2.20}$$

其中 C 与 ε 无关.

因为 $H^2(Q)\to H^1(Q)$ 紧的, $H^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 紧的, $H^2(0,T)\to H^1(0,T)$ 紧的. 所以结合(2.16)—(2.17),(2.20)知,存在一子列,不妨仍记为本身,使得当 $\varepsilon\to 0$ 时,有

$$\varphi_\varepsilon\to\Phi \text{ 在 } H^1(0,T;H^1(\Omega)) \text{ 中强收敛}, \tag{2.21}$$

$$\Delta\varphi_\varepsilon\to\Delta\Phi \text{ 在 } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \text{ 中强收敛}, \tag{2.22}$$

$$\varphi_\varepsilon(0,T)\to\Phi(0,T) \text{ 在 } H^1(0,T) \text{ 中强收敛}. \tag{2.23}$$

根据线性椭圆型方程的正则性,则有

$$\varphi_\varepsilon\to\Phi \text{ 在 } H^1(0,T;H^2(\Omega)) \text{ 中强收敛}, \tag{2.24}$$

下面证明 $\Phi=\varphi$. 在(III_ε)中令 $\varepsilon\to 0$,则有

$$(\mathrm{III})\quad\begin{cases}-(1-\Delta)\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}-\Delta\Phi=\psi, & \text{在 } Q \text{ 中},\\ \Phi=0, & \text{在 } \Gamma\times(0,T) \text{ 上},\\ \Phi(x,T)=0. & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

又由唯一性知 $\Phi=\varphi$,这样引理 2.3 得证.

从而定理 2 得证.

3 定理 1′和定理 2′的证明

由定理 2 可知,证明定理 2′,只需考虑下面的引理.

引理 3.1 当 $\varepsilon\to 0$ 时,若

$$\psi_\varepsilon\to 0 \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.1}$$

则必有

$$\varphi_\varepsilon\to 0 \text{ 在 } H^1(0,T;H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.2}$$

$$\varphi_\varepsilon(0,t;\psi_\varepsilon)\to 0 \text{ 在 } H^1(0,T)) \text{ 中弱收敛}. \tag{3.3}$$

证明 由引理 2.2 知,存在子列,不妨仍记为本身,有

$$\varphi_\varepsilon\to\Phi \text{ 在 } H^1(0,T;H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.4}$$

$$\Delta\varphi_\varepsilon\to\Delta\Phi \text{ 在 } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.5}$$

$$\Delta\varphi_\varepsilon'\to\Delta\Phi' \text{ 在 } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.6}$$

$$\Delta^2\varphi_\varepsilon\to\Delta^2\Phi \text{ 在 } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.7}$$

$$\Delta^2\varphi_\varepsilon'\to\Delta^2\Phi' \text{ 在 } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \text{ 中弱收敛}, \tag{3.8}$$

$$\varphi_\varepsilon(0,t;\psi_\varepsilon)\to\Phi(0,T) \text{ 在 } H^1(0,T) \text{ 中弱收敛}. \tag{3.9}$$

由(3.4)—(3.9)知,在(I_ε)中,令 $\varepsilon\to 0$,则有

$$
\begin{cases}
-(1-\Delta)\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}-\Delta\Phi=0, & \text{在}\ Q\ \text{中} \qquad (3.10)\\
\Phi=0, & \text{在}\ \Gamma\times(0,T)\ \text{上} \qquad (3.11)\\
\Phi(x,T)=0. & \text{在}\ \Omega\ \text{中}. \qquad (3.12)
\end{cases}
$$

根据唯一性知，$\Phi=0$，所以定理 2′得证.

下证定理 1′，当 $\varepsilon\to 0$，时，且 $v_\varepsilon\to v$ 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛，由定理 1 知，

$$y_\varepsilon\to y\ \text{在}\ L^2(Q)\ \text{中弱收敛} \tag{3.13}$$

在(1.1)中，令 $\psi=y$，在(1.2)中令 $\psi_\varepsilon=y_\varepsilon$，则有

$$\int_Q y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T v(t)\varphi(0,t)\mathrm{d}t,\quad \int_Q y_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T v_\varepsilon(t)\varphi_\varepsilon(0,t)\mathrm{d}t.$$

由定理 2′知 $\int_0^T v_\varepsilon\varphi_\varepsilon(0,t)\mathrm{d}t=\int_0^T v(t)\varphi(0,t)\mathrm{d}t$，所以有

$$\int_Q y_\varepsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.14}$$

综合(3.13)和(3.13)，可有 $y_\varepsilon\to y$ 在 $L^2(Q)$中强收敛. 这样定理 1′得证.

参考文献：

[1] LI Ta-tsien and WHITE L W. *Total flux (nonlocal) boundory value problems for pseudoparabolie equations* [J]. Applicable Analysis, 1983, **16**: 17—31.

[2] SHOWALTER R E and TING T W. *Pseudoparabolie partial differential equations* [J]. Siam. J. Math. Anal., 1970, **1**: 1—26.

[3] LI Ta-tsien. *Limit behaviours of solutions for some parabolic equations of higher order and their applications to the optimal control* [J]. Chin Ann of Math., 1982, **3**(4): 527—543.

[4] 谭永基. 带奇性右端项的一类线性双曲型方程的摄动 [J]. 数学年刊 A 辑, 1985, **6**(1): 23—28.

[5] 李大潜等. 一类具奇异右端的椭圆型方程的摄动问题 [J]. 复旦大学学报(自然科学版), 1984, **23**(4): 469—474.

Perturbation Problems for Pseudoparabolic Equations with Singular Inhomogeneous Terms

LI Feng-quan[1], XU Chuan-fang[2]

(1. Dept. of Math., Qufu Normal University, Shandong 273165;
2. Dept. of Math. Linyi Teachers' College, Shandong 276005)

Abstract: In this paper, we discuss a class of perturbation problems for pseudoparabolic equations with a singular inhomogeneous term and prove that the existence and limit behaviour of generalized solutions to the perturbation problems, moreover we botain that the solutions of perturbation problems converge to the solutions of the original problems in a certain sense as ε tends to zero.

Key words: pseudoparabolic equations; perturbation; limit behaviour.