第 20 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

非线性 Cahn-Hilliard 方程的拟谱算法*

鲁百年[1]， 张瑞凤[2]

(1. 陕西师范大学数学系，西安 710062； 2. 开封师专数学系，河南 475000)

摘 要：本文对非线性 Cahn-Hilliard 方程构造了拟谱格式，证明了该格式的收敛性和稳定性，给出了数值例子.

关键词：非线性 Cahn-Hilliard 方程；拟谱格式；误差估计；快速 Fourier 变换.

分类号：AMS(1991) 65M99/CLC O241.82

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2000)02-0256-05

1 引 言

本文考察如下一类非线性 Cahn-Hilliard 方程周期初值问题：

$$\begin{cases} U_t = M\Delta\Phi(U) - M\gamma\Delta^2 U + f(x,t), & (x,t)\in R\times J, & (1.1)\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in R, & (1.2)\\ U(x+2\pi,t)=U(x,t), & (x,t)\in R\times J. & (1.3)\end{cases}$$

这里 Δ 为 Laplace 算子；∇ 为梯度算子；$M>0$ 为迁移率；$\gamma>0$ 为界面效应现象参数；$\Phi(U)=\psi'(U)$，ψ 为自由能量，$\Phi(\cdot)$ 为实变量实值函数；$U_0(x)$ 和 $U(x,t)$ 分别为关于 x 以 2π 为周期的已知和未知实值函数. $J=[0,T](T>0)$，R 为实直线.

Cahn-Hilliard 方程是一个反映一种易熔合的化学混合物成二元合金被聚冷而成的一种不稳定状态继而分解为性质截然不同的两相位过程的模型. 文[1]研究了该方程的古典整体解的存在性与唯一性；文[2]研究了该方程 Galerkin 有限元方法；文[3]研究了该方程的显式差分方法，文[8]研究了该方程的谱方法.

为了研究方程解的性质，很值得寻求一个高精度、快速收敛的算法. 由于此方程为周期条件，故采用拟谱格式. 它既具有“无穷阶”收敛速度，又可采用 FFT 算法求解非线性偏微分方程. 此方法是十分有效的方法.

本文构造了方程(1)的拟谱格式，利用有界延拓，证明其格式的收敛性与稳定性. 给出了算法，分析了运算的复杂度，给出了数值例子.

本文总假定 C 为广义常数，依赖于常数 M,γ,T 和函数 Φ,U_0，在不同处意义不尽相同.

* 收稿日期：1996-12-02

基金项目：国家自然科学基金(19501025)、回国人员启动费资助课题及河南省教委科学研究计划项目

作者简介：鲁百年(1961-)，男，陕西省户县人，博士，陕西师范大学副教授.

2 拟谱方法与误差

令 $I=[0,2\pi)$，在 I 上定义内积和范数

$$(U,V)=\int_I UV\mathrm{d}x,\qquad \|U\|^2=(U,U).$$

对于正整数 s，定义 Sobolev 范数和半范数如下：

$$\|U\|_s^2=\sum_{j=0}^{s}\|D^jU\|^2,\quad |U|_s^2=\|D^sU\|^2.$$

周期 Sobolev 空间 $H_p^s(I)$ 的定义见[4].

对于正偶数 N，设 $\chi_j(x)=e^{ijx}/\sqrt{2\pi}$ 为基函数. $S_N=\mathrm{span}\{\chi_j|-N/2\leqslant j\leqslant N/2-1\}$. 定义 P_N 为从 $H_p^s(I)$ 到 S_N 的 L^2 正交投影算子.

设 M 为一正整数，令 $k=T/M$，U_N^n 为 U_N 在点 $t_n=nk$ 的近似值. 令 $h=2\pi/N$. $x_j=jh(0\leqslant j\leqslant N)$ 为节点，定义 I 上的离散内积和范数如下：

$$(U,V)_h=h\sum_{j=1}^{N}U(x_j)V(x_j),\qquad \|U\|_h^2=(U,U)_h.$$

定义插值算子如下：对于任意的 $f\in C(I)$，$I_Nf\in S_N$ 且 $I_Nf(x_j)=f(x_j)$，$\forall\ x_j\in I$.

我们知道 $I_Nf(x)=\sum\limits_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\tilde{f}_j\Phi_j(x)$，其中 $\tilde{f}_j=(f,\Phi_j)_h$.

引理 1[5] 设 $V\in H_p^s(I)$，对于 $s\geqslant\mu\geqslant 0$，存在与 V,N 无关的正常数 C，使得

$$\|V-P_NV\|_\mu\leqslant CN^{\mu-s}|V|_s;\quad \|V-I_NV\|_\mu\leqslant CN^{\mu-s}|V|_s.$$

引理 2[5] 设 $V\in S_N$，对于 $\sigma\geqslant\mu\geqslant 0$，存在与 V,N 无关的正常数 C，使得

$$\|V\|_\sigma\leqslant CN^{\sigma-\mu}\|V\|_\mu.$$

引理 3[5] 设 $f,g\in C(I)$，$\chi\in S_N$，则 $(I_Nf,I_Ng)_h=(I_Nf,I_Ng)=(f,g)_h$；$\|\chi\|_h=\|\chi\|$.

定义方程(1)的拟谱格式，求 $U_N^n\in S_N$，使得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{U_N^{n+1}-U_N^n}{k},\chi\right)_h=M(\Phi(U_N^n),\Delta\chi)_h-M\gamma(\Delta U_N^n,\Delta\chi)_h+(f^n,\chi)_h,\ \chi\in S_N, & (2.1)\\ (U_N^0,\chi)_h=(U_0,\chi)_h,\quad \chi\in S_N. & (2.2)\end{cases}$$

引理 4 方程(2)等价于如下格式：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{k}(U_N^{n+1}-U_N^n,\chi)=M(I_N(\Phi(U_N^n)),\Delta\chi)-M\gamma(\Delta U_N^n,\Delta\chi)+(I_Nf^n,\chi),\ \chi\in S_N, & (3.1)\\ U_N^0=I_NU_0. & (3.2)\end{cases}$$

定理 1 设方程(1)的解 $U\in L^\infty(J,H_p^s(R))\cap C^2(J;L_p^2(R))$，$U_N^n$ 为(2)的解，$f,\Phi(\cdot)\in C^{S+1}(R)$，$S>1/2$. 对于 $\sigma>0$，当 $M,\gamma>0$ 且 $kN^4\leqslant\sigma\leqslant\dfrac{2}{3M\gamma}$ 时，有

$$\sup_{0\leqslant n\leqslant N}(\|U_N^n-U(t_n)\|)\leqslant C(N^{-s}+k).$$

证明 令 $\tilde{U}(t_n)=P_NU(t_n)$，$e^n=U(t_n)-U_N^n$. $\xi_n=U(t_n)-\tilde{U}(t_n)$，$\eta_n=\tilde{U}(t_n)-U_N^n$，则 $e^n=\xi_n+\eta_n$，故

$$\| e^n \| \leqslant \| \xi_n \| + \| \eta_n \| \leqslant cN^{-S} + \| \eta_n \| . \tag{4}$$

由 Taylar 展式知

$$\widetilde{U}_t(t_n) = \frac{1}{k}[\widetilde{U}(t_{n+1}) - \widetilde{U}(t_n)] - k\widetilde{U}_{tt}(t_n + \theta k)(|\theta| < 1),$$

又$(\widetilde{U}_t, \chi) = (U_t, \chi)$，$(\widetilde{U}_{tt}, \chi) = (U_{tt}, \chi)$.

由(1.1)式得

$$\frac{1}{k}(\widetilde{U}(t_{n+1}) - \widetilde{U}(t_n), \chi) = M(\Phi(U(t_n)), \Delta\chi) - M\gamma(\Delta\widetilde{U}(t_n), \Delta\chi) + \frac{k}{2}(\widetilde{U}_{tt}(t_n + \theta k), \chi) + (f^n, \chi). \tag{5}$$

(5)－(3.1)，得

$$\frac{1}{k}(\eta_{n+1} - \eta_n, \chi) = M(\Phi(u(t_n)) - I_N(\Phi(U_N^n)), \Delta\chi) - M\gamma(\Delta\eta_n, \Delta\chi) + \frac{k}{2}(U_{tt}(t_n + \theta k), \chi) + (f^n - I_N f^n, \chi). \tag{6}$$

令 $\chi = \eta_n$，则

$$(\eta_{n_t}, \eta_n) = M(\Phi(U(t_n)) - I_N(\Phi(U_N^n)), \Delta\eta_n) - M\gamma \| \Delta\eta_n \|^2 + \frac{k}{2}(U_{tt}(t_n + \theta k), \eta_n) + (f^n - I_N f^n, \eta_n). \tag{7}$$

由引理 1 及题设条件知

$$\| f^n - I_N f^n \| \leqslant CN^{-S} | f^n |_S \leqslant CN^{-S};$$

$$\| \Phi(U(t_n)) - I_N(\Phi(U(t_n))) \| \leqslant CN^{-S};$$

$$\begin{aligned} \| I_N(\Phi(U(t_n))) - I_N(\Phi(U_N^n)) \| &\leqslant \| \Phi(U(t_n)) - \Phi(U_N^n) \| + CN^{-S} |\Phi|_S \\ &\leqslant \| \frac{\partial\Phi}{\partial U} e^n \| + CN^{-S} \leqslant C \| e^n \| + CN^{-S}. \end{aligned}$$

这里假定 $\Phi(\cdot) \in C_b^2(R)$，而 $\| U_{tt} \| \leqslant C$，$\| \widetilde{U}_{tt} \| \leqslant C$. 于是(7)式为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \eta_n \|_t^2 - \frac{k}{2} \| \eta_{n_t} \|^2 &\leqslant CM(2N^{-S} + \| e^n \|) \| \Delta\eta_n \| - \\ &\quad M\gamma \| \Delta\eta_n \|^2 + \frac{k}{2} C \| \eta_n \| + CN^{-S} \| \eta_n \| \\ &\leqslant (MC\varepsilon - M\gamma) \| \Delta\eta_n \|^2 + \frac{4MC + 3C}{8\varepsilon} \| \eta_n \|^2 + \\ &\quad \frac{9MC + 2C\varepsilon^2}{2\varepsilon} N^{-2S} + \frac{C\varepsilon}{2} k^2. \end{aligned} \tag{8}$$

注意到

$$\| \eta_{n_t} \|^2 \leqslant 3(M^2C^2N^4 \| \eta_n \|^2 + M^2\gamma^2N^4 \| \Delta\eta_n \|^2 + C^2(M+1)^2N^{-2S}). \tag{9}$$

(9)式代入(8)式，整理得：

$$\| \eta_n \|_t^2 \leqslant (3M^2\gamma^2kN^4 + 2MC\varepsilon - 2M\gamma) \| \Delta\eta_n \|^2 + (3M^2C^2kN^4 + \frac{4MC + 3C}{4\varepsilon}) \| \eta_n \|^2 + (3C^2(M+1)^2T + \frac{9MC + 2C\varepsilon^2}{\varepsilon}) N^{-2S} + \varepsilon Ck^2. \tag{10}$$

令 $3M^2\gamma^2kN^4 + 2MC\varepsilon - 2M\gamma \leqslant 0$ 即 $kN^4 \leqslant \frac{2(\gamma - C\varepsilon)}{3M\gamma^2}$. 由题设条件知(10)式可化为

$$\| \eta_n \|_t^2 \leqslant C(\| \eta_n \|^2 + N^{-2S} + k^2).$$

由 Gronwall 不等式及 $\|\eta_n\|=0$ 得

$$\|\eta_n\| \leqslant C(N^{-S}+k). \tag{11}$$

定理结论成立.

类似[4,6,7,9]的方法及题设条件,可取消 $\Phi(\cdot)\in C_b^2(R)$ 的假定,定理证毕.

类似于定理 1 的证明,有如下稳定性定理:

定理 2　设 U_N^n 为方程(2)的解,$U_N^{*^n}$ 为方程(2)在初始值 U_0 有扰动 δU_0 时的解,则

$$\sup_{0\leqslant n\leqslant N} \|U_N^n - U_N^{*^n}\| \leqslant C\|\delta U_0\|.$$

3　算法及数值例子

讨论方程(2)的算法. 在(2)中令 $\chi=\chi_j$ 则对于任意的 $j(-N/2\leqslant j\leqslant \frac{N}{2}-1)$,(2)式可化为如下显式:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{N_j}^{n+1} = a_1\tilde{u}_{N_j}^n + a_2\widetilde{\Phi(U_N^n)}_j + a_3\tilde{f}_j^n, & (12.1)\\ \tilde{u}_{N_j}^0 = (\tilde{u}_0)_j. & (12.2)\end{cases}$$

其中 $a_1=1-kM\gamma j^4; a_2=-kMj^2; a_3=k$.

由于有了快速 Fourier 变换(FFT),采用拟谱方法比[8]中的谱方法运算量小,速度快,且与[8]中的谱方法有相同的精度. 在一般情况下,采用(12)式来计算.

考虑非线性项 $\widetilde{\Phi(U_N^n)}_j$ 的计算:

$$\begin{array}{ccc} \{\tilde{U}_{N_j}^n \mid -N/2\leqslant j\leqslant N/2-1\} & \xrightarrow{(\mathrm{FFT})^{-1}} & \{U_N^n(x_j)\mid 0<j\leqslant N\}, \\ & & \downarrow \\ \{\widetilde{\Phi(U_N^n)}_j \mid -N/2\leqslant j\leqslant N/2-1\} & \xleftarrow{\mathrm{FFT}} & \{\Phi(U_N^n(x_j))\mid 0<j\leqslant N\}. \end{array}$$

故求 $\widetilde{\Phi(U_N^n)}_j$ 需要两次 FFT,运算量为 $4N\ln N$. 由于 f,Φ 为可变函数,所以暂不统计其运算量. 求 $\tilde{f}_j^n$ 需一次 FFT,因此整体共需乘法运算量为 $3N(2\ln N+1)$.

令 $M=0.001, \gamma=1$,

$$\Phi(U)=u(u^2-1), f(x,t)=(M\gamma-M-1)e^{-t}\sin x+3Me^{-3t}\sin x(3\sin^2 x-2).$$

方程(1)有真解 $U(x,t)=e^{-t}\sin x$.

应用 C 语言在 PC486 计算机上进行模拟. 取 $T=1.2, n=2000, k=T/n=0.0006, N=32$,有 $kN^4<\frac{2}{3M\gamma}$ 满足收敛条件. 采用拟谱格式(12)进行计算并与[3]中的差分法进行了比较. 结果表示:当 $N\geqslant 8$ 时,$k=0.0006$ 的误差较用文[3]中差分法计算 $h=0.07, k=0.0006$ 的精度要高,且拟谱法速度较差分法要快得多.

参考文献：

[1] ELLIOTT C M and MIKELIC A. *Existence for the Cahn-Hilliard phase separation model with a non-differentiable energy* [J]. Annali di Matematica puraed applicata (IV), Vol. CLVII (1991), 181—203.

[2] ELLIOTT C M and ZHENG Song-mu. *On the Cahn-Hilliard equation* [J]. Arch. Ration. Mech. Anal., 1986, **96**: 339—357.

[3] 鲁百年,张瑞凤. Cahn-Hilliard 方程的显式差分格式 [J]. 工程数学学报, 1997, **14**(1): 52—56.

[4] 张德荣等. 一类具有磁场效应的 Schrödinger 方程组的有限差分解. [J]. 高校应用数学学报, 1987, **2**(2): 245—252.

[5] KREISS H O, OLIGER J. *Stability of the fourier method* [J]. SIAM. J. Number. Anal., 1979, **16**: 421—433.

[6] LU B N. *A finite difference method for the model of wheezes* [J]. J. Comp. Math., 1995, **13**(2): 123—129.

[7] 鲁百年. 高维非线性 Schrödinger 方程的 Fourier 谱方法 [J]. 计算数学, 1991, **13**(1): 25—33.

[8] 张瑞凤等. Cahn-Hilliard 方程的谱方法 [J]. 南都学坛(自然科学版), 1997, **17**(3): 1—4.

[9] 张瑞凤. 一类广义 Kdv-Burgers 型方程的拟谱方法 [J]. 应用数学, 1998, **11**(1): 77—80.

Pseudo-Spectral Approximations for a Nonlinear Cahn-Hilliard Equation

LU Bai-nian[1], ZHANG Rui-feng[2]

(1. Dept. of Math., Shanxi Normal University, Xi'an 710062;

2. Dept. of Math., Kaifeng Normal College, Henan 475000)

Abstract: In this paper, the pseudo-spectral approximation for a nonlinear Cahn-Hilliard equation is presented. Covergence and stability of the approximation have been proved. Finally, numerical examples are proposed.

Key words: nonlinear Cahn-Hilliard equation; pseudo-spectral approximation; error estimation; FFT.