第20卷第2期 数学研究与评论 Vol. 20 No. 2
2000年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2000

$L(m,3)$ 的对称链分解*

谭 明 术
(四川三峡学院数学系，重庆 404000)

摘 要:对称链是一种特殊的偏序,用它已经得到了许多非常漂亮的结果.如果一个偏序集可以分解成不相交的对称链之并,则称此偏序集具有对称链分解.但目前已证明具有这种分解的偏序集并不多.$L(m,n)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i$ 均为整数且 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_m\leqslant n\}$,序关系$\leqslant$定义为:$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\leqslant Y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$充要条件是对所有 i,$x_i\leqslant y_i$.有人猜测 $L(m,n)$具有对称链分解.1980年,Lindstrom 和 West 分别证明了 $L(3,n)$,$L(4,n)$猜想成立.本文构造性地证明了对于 $L(m,1)$,$L(m,2)$,$L(m,3)$猜想成立,并讨论了有关计数问题.

关键词:序;对称链;对称链分解.
分类号:AMS(1991) 06A06/CLC O157.1
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2000)02-0306-05

1 引 言

定义1 $(P,<)$是一个偏序集,x,y 是 P 中两元素,y 覆盖 x 意指 $x<y$,但不存在 $u\in P$ 使得 $x<u<y$.P 中元素 x 的秩 $r(x)$是使得 $x_1<x_2<\cdots<x_r<x$ 的最大整数 r,其中 $x_i\in P$,x_{i+1}覆盖 $x_i(i=1,2,\cdots,r-1)$,$r(P)$是 P 中所有元素的最大秩.P 的一些元素 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 形成一条对称链,如果满足两条件:

(1) x_{i+1}覆盖 x_i,$i<k$;

(2) $r(x_1)+r(x_k)=r(P)$.

如果一个偏序集可以分解成不相交的对称链之并,则称此偏序集具有对称链分解.

定义2 m,n 为正整数,$L(m,n)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i$ 均为整数,且 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_m\leqslant n\}$,其中偏序关系$\leqslant$定义为:

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\leqslant Y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

对所有 i,$x_i\leqslant y_i$,元素 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$的秩 $r(X)=\sum_{i=1}^{m}x_{i}$.容易证明,$L(m,n)$中共有 C_{n+m}^{m} 个元素.显然,若 $L(m,n)$中 k 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 具有关系 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$ 且 $r(x_1)+r(x_k)=mn$;$r(x_{i+1})=r(x_i)+1$,$i=1,2,\cdots,k-1$,那么此链为 $L(m,n)$的一条对称链.

定理1 $L(m,1)$,$L(m,2)$具有对称链分解.

* 收稿日期:1998-06-12;修订日期:1999-07-12
作者简介:谭明术(1962-),男,重庆人,硕士,讲师.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 设 $X_i=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{m-i},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{i})$. $L(m,1)$只有一种分解方式:

$$X_0\leqslant X_1\leqslant\cdots\leqslant X_m.$$

设 $X_{i,j}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{m-i-j个},\underbrace{1,\cdots,1}_{i个},\underbrace{2,\cdots,2}_{j个})$,把 $L(m,2)$的所有元素及元素间的序关系列成一个三角阵列,此三角阵列在此后的证明中非常重要. 为了方便起见,借用矩阵表示方法:$x(u,v)$表示第 u 行第 v 列的元素(有时也看作坐标),$u=1,2,\cdots,m+1;v=u,u+1,\cdots,m+1$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X_{00} & \leqslant & X_{10} & \leqslant & X_{20} & \leqslant & X_{30} & \leqslant & \cdots & \leqslant & X_{(m-1)0} & \leqslant & X_{m0} \\
 & & X_{01} & \leqslant & X_{11} & \leqslant & X_{21} & \leqslant & \cdots & \leqslant & X_{(m-2)1} & \leqslant & X_{(m-1)1} \\
 & & & & X_{02} & \leqslant & X_{12} & \leqslant & \cdots & \leqslant & X_{(m-3)2} & \leqslant & X_{(m-2)2} \\
 & & & & & & & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \ddots & & X_{1(m-2)} & \leqslant & X_{2(m-2)} \\
 & & & & & & & & & & X_{0(m-1)} & \leqslant & X_{1(m-1)} \\
 & & & & & & & & & & & & X_{0m}
\end{array}$$

注意:阵列中每列从上到下也具有序关系. 从阵列中的序关系可以看出:$L(m,2)$只有两种对称链分解方式,且链数为$[m/2]+1$.

引理 1 $L(m,3)$的元素由 $L(m,2)$的 $x(1,i)$加上第 i 至 $m+1$ 行各元素而得,$i=1,2,\cdots,m+1$.

证明 只需证明两点:一是这样相加(指对应分量相加)后,各元素各不相同;二是元素个数为 C_{m+3}^3. 注意到用 $x(1,i)$加第 i 至 $m+1$ 行得到的各元素均恰有 $i-1$ 个 3,i 不相同,当然所得元素也不相同,即使 3 的个数相同,也不会造成相同元. 因为 $L(m,2)$中不同元加上一个相同元后仍然不同.

对于元素个数:$L(m,2)$中第 i 至 $m+1$ 行元素个数为

$$1+2+\cdots+(m+2-i)=C_{m+3-i}^2,$$

相加后总数为

$$C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_2^2=C_{m+3}^3.$$

引理 2 设为 s 正整数,$L(m+1,3)$可通过所有 $L(m,3)$的元素前加上一个 0 和 $E(m+1)$加上 $L(m+1,2)$的所有元素而得到,其中 $E(s)=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{s})$.

证明与引理 1 类同,从略.

引理 3 设 $X,Y,Z\in L(m,2)$,且 $X\leqslant Y\leqslant Z,r(Z)=r(Y)+1=r(X)+2$,若 $L(m,3)$的某一对称链以 $E(m)+X$ 为结束元,则可以通过延长 $L(m,3)$的对称链使其成为 $L(m+1,3)$的对称链. 事实上,$(0,E(m))+(0,X)\leqslant E(m+1)+(0,X)\leqslant E(m+1)+(0,Y)\leqslant E(m+1)+(0,Z)$,再由引理 1 可得.

下面引入 $L(4s-4,2),L(4s-3,2),L(4s-2,2),L(4s-1,2)$的三角阵列的 4 种划分方式:

方式 W_1:在 $L(4s-2,2)$上从右到左,自下而上,交替使用折线“▭”,“▭”连接 3 个元素(例见图 1),每个元素最多被画到一次. 处于▭(或▭)上的 3 个元素依从左到右,自上而下依次称为始点,中间点和终点. 在第 $4s-3$ 列与第 $4s-4$ 列间打 $2s-2$ 个‘▭’,第 $4s-6$ 列与第 $4s$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

-5 列间打 $2s-3$ 个'└─'…，依此类推. 各列折线个数分别为 $2s-2,2s-3,\cdots,2,1$，称之为折线序列.

W_2,W_3,W_4 方式与 W_1 方式完全类同，只是折线序列不同. W_2 方式是在 $L(4s-3,2)$ 上打折线的序列为 $2s-1,2s-3,2s-3,\cdots,3,3,1,1$；$W_3$ 方式是在 $L(4s-2,2)$ 上打折线序列为 $2s-1,2s-2,\cdots,2,1$；W_4 方式是在 $L(4s-1,2)$ 上折线序列为 $2s,2s-2,2s-2,\cdots,4,4,2,2$.

图 1 是 $L(5,2)$，$L(6,2)$ 的划分，其中实线表示 $L(5,2)$ 的划分过程，带箭头虚线表示 $L(6,2)$ 的划分过程，圈 0 表示相应元素.

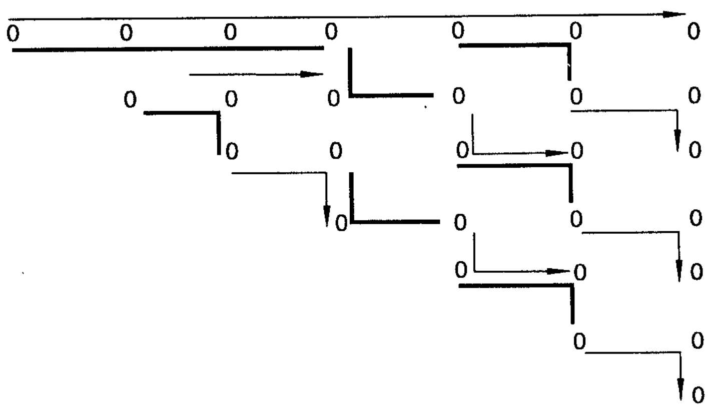

图 1

2 结 论

定理 2 $L(m,3)$ 可以通过在 $L(m,2)$ 上施行某一 W_i 方式，即在 $L(4s+i-1,2)$ 上施行 W_i 方式 $(i=1,2,3,4)$ 而被分解成不相交的对称链之并.

证明 数学归纳法.

当 $m=5,6,7,8$ 时容易验证定理 2 成立(此处从略).

设当 $s\leqslant k-1$ 时对于 $L(4s-3,3)$，$L(4s-2,3)$，$L(4s-1,3)$ 以及 $L(4s,3)$ 定理 2 成立. 下面看 $s=k$ 时的情形. 即证明从 $L(4s-i,3)$ 的对称链是如何过渡到 $L(4s-i+1,3)$ 的对称链的，$i=4,3,2,1$，而且过渡方式为某一 W_i 方式在 $L(m,2)$ 上将使 $L(m,3)$ 成为对称链的终点作为 $L(m+1,2)$ 的起点，用折线延长而变成 $L(m+1,3)$ 的对称链，余下的链各元素加上 $E(m+1)$ 后又刚好是 $L(m+1,3)$ 的对称链.

下面先看 $L(4k-3,3)$ 过渡到 $L(4k-2,3)$ 的过程：

由归纳假设，所有 $L(4k-4,3)$ 的对称链终点为下面在 $L(4k-4,2)$ 中的点加上 $E(4k-4)$：

$$
\begin{aligned}
&x(i,4k-3e), && i=e+2,e+4,\cdots,4k-3e,\\
&x(i,4k-(3e+1)), && i=e+2,e+4,\cdots,4k-(3e+1),e=1,2,\cdots,k-1,\\
&x(e,4k-3e), && e=1,2,\cdots,k.
\end{aligned}
$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

以 W_2 方式在 $L(4k-3,2)$ 上划分后容易验证，其起点则好是上述点，并同时得到终点：

$x(i,4k-2),i=2,4,\cdots,4k-2$，共有 $2k-1$ 个点；

$x'(i,4k-3e),i=e+3,e+5,\cdots,4k-(3e+1)$，共有 $2k-(2e+1)$ 个点；

$x(i,4k-(3e+2)),i=e+2,e+4,\cdots,4k-(3e+2)$，共有 $2k-(2e+1)$ 个点，

$$e=1,2,\cdots,k-1.$$

余下的第 e 链：

$$(0,\cdots,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{e-2个})\leqslant\cdots\leqslant(0,\cdots,0,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{4k-4e+3个},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{e-1个})=y(e,4k-3e+3),\quad e=2,3,\cdots,k.$$

显然，这上述 $2k^2-k$ 个终点加上 $E(4k-3)$ 就成了 $L(4k-3,3)$ 的所有对称链的终点.

下面考察 $L(4k-2,2)$ 以 W_3 方式打折线后的起点：

$x'(i,4k-e),i=e+1,e+3,\cdots,4k-(3e+1)$，有 $2k-2e$ 个点；

$x(i,4k-(3e-1)),i=e+1,e+2,\cdots,4k-(3e-1)$，有 $2k-(2e-1)$ 个点，$e=1,2,\cdots,k$.

当 $e=k$ 时，$x(k+1,k-1)$ 不存在，只有一个元素就是 $x(k+1,k+1)$.

显然，W_3 中的 x' 则好是 W_2 中的所有 x' 加上 y. W_3 中 $e=1$ 时 x 与 W_2 中 $x(i,4k-2),i=2,4,\cdots,4k-2$ 相同，W_3 中其余所有 x 正好是 W_2 中的 x. 以上说明，W_2 的终点刚好是 W_3 的起点.

施行 W_3 后余下元素组成的第 e 链：

$$(0,0\cdots,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{e-1个})\leqslant\cdots\leqslant(0,\cdots,0,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{4k-4e+2个},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{e-1个})=x(e,4k-3e+2),\quad e=2,\cdots,k$$

这 k 条链各元素加上 $E(4k-2)$ 后构成 $L(4k-2,3)$ 中的对称链（W_2,W_3 方式可参见例图 1）.

其它情形的过渡与上面完全类似，最后从 $L(4k-1,3)$ 到 $L(4k,3)$ 的过渡在 $L(4k-1,2)$ 上依 W_4 方式得到终点：

$x(i,4(k+1)-3e),\qquad i=e+2,e+4,\cdots,4(k+1)-3e$；

$x(i,4(k+1)-(3e+1)),\qquad i=e+2,e+4,\cdots,4(k+1)-(3e+1),e=1,2,\cdots,k$.

余下 $L(4k,2)$ 的第 e 链：

$$(0,\cdots,0,\underbrace{2,\cdots,2}_{e-1个})\leqslant\cdots\leqslant(0,\cdots,0,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{4k-4e+4个},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{e-1个})=x(e,4(k-1)-3e),$$

$$e=2,\cdots,k+1$$

得出的结论与归纳假设一致.

由引理 1,2,3 及归纳法原理知定理 2 成立.

推论 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=[3m/2]$ 的非负整数解的个数 $N(m)$ 为：

$$N(m)=\begin{cases}(m+1)(m+3)/8, & 当\ m\equiv1(\mathrm{mod}2)\\(m^2+4m+8)/8, & 当\ m\equiv0(\mathrm{mod}4)\\(m+2)^2/8, & 当\ m\equiv2(\mathrm{mod}4)\end{cases}$$

其中 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_m\leqslant3$. 实际上 $N(m)$ 就是 $L(m,3)$ 中对称链条数，它也表示为：

$N(4k)=2k^2+2k+1$；$N(4k-1)=2k^2+k$；$N(4k-2)=2k^2$；$N(4k-3)=k(2k-1)$

最后指出：$L(m,3)$ 的对称链分解方式很多，如 $L(5,3)$ 就至少有 7 种对称链分解方式.

$L(m,3)$ 的构造性证明表明：对 $L(m,n)$ 用构造方法证明将是极其复杂和富于技巧的，要

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 $L(m,n)$势必需要其它组合数学知识和技巧.

参考文献：

[1] 卢开澄. 组合数学(M)(第二版) [M]. 北京：清华大学出版社，1995.

[2] 耿素云等. 离散数学 [M]. 北京：清华大学出版社，1992.

[3] Anderson I. *Combinatorics of Finite Sets* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1987.

[4] Lindstrom B. *A Partion of $L(3,n)$ into saturated symmetric chains* [J]. Eur. J. Comb., 1980, 1(1): 61—63.

[5] West D B. *A symmetric chain decomposition of $L(4,n)$* [J]. Eur. J. Comb., 1980, 1(1): 379—383.

Symmetric Chain Decomposition of $L(m,3)$

TAN Ming-shu

(Dept. of Math., Sichuan Three Gorges College, Chongqing 404000)

Abstract: Symmetric chain is a special partial order. Many beautiful results with it have been obtained a poset is called a symmetric chain decomposition if the poset can be expressed as a disjoint union of symmetric chains. But there have not been so many such kind of posets so far. $L(m,n)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)x_i$ integers, $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_m\leqslant n\}$ with order relation $\leqslant$ defined by $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\leqslant Y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ iff $x_i\leqslant y_i$ for each i. It has been conjectured that each $L(m,n)$ is a symmetric chain decomposition. At present, the conjecture has been confirmed only for $L(3,n)$ by Lindstrom (1980) and for $L(4,n)$ by West (1980). This paper proves that the conjecture is true for $L(m,1)$, $L(m,2)$ and $L(m,3)$, and corresponding counting is discussed.

Key words: order; symmetric chain; symmetric chain decomposition.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.